

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

по дисциплине «Цифровая обработка сигналов»

РАЗДЕЛ №1 Введение

1. ЛЕКЦИЯ №1

Тема: Введение

Учебные вопросы:

1. Особенности систем ЦОС.
2. Задачи, решаемые наукой о ЦОС.
3. Способы реализации ЦОС (программный, аппаратный временной, спектральный).
4. Классификация цифровых систем.

1.1. Вопрос №1

Особенности систем ЦОС

В общем случае **система** – совокупность взаимосвязанных и взаимодействующих элементов [[ГОСТ Р ИСО 9000-2008](#)].

Для технических систем в определении должно присутствовать наличие цели. Поэтому **система** – множество (совокупность) материальных объектов (элементов) любой, в том числе различной физической природы, а также информационных объектов, взаимосвязанных и взаимодействующих между собой для достижения общей цели. [[ГОСТ Р 43.0.2-2006](#)].

Любая задача обработки сигналов в технических системах сводится к преобразованию множества X входных сигналов $x \in X$ во множество Y выходных сигналов $y \in Y$. Правило G , по которому выполняется это преобразование $X \xrightarrow{G} Y$, называется *оператором* или *алгоритмом* преобразования (обработки), а физический объект, реализующий это правило, — *системой* обработки сигналов.

В зависимости от средств (элементной базы), с помощью которых реализуется система обработки, сигналы на входе, выходе и внутри системы удобно представлять в той или иной форме. При этом классификация типов обработки сигналов может быть проведена по виду сигналов на входе, выходе и внутри системы. Однородные системы по типу обработки сигналов можно разделить на четыре группы:

- аналоговые системы обработки в непрерывном времени (аналоговые системы);
- аналоговые системы обработки в дискретном времени (дискретно-аналоговые системы);
- цифровые системы обработки в дискретном времени (цифровые системы);
- цифровые системы обработки в непрерывном времени.

Наибольшее распространение получили аналоговые и цифровые системы обработки сигналов, причём в радиоэлектронике и других областях техники в последние десятилетия наметилась тенденция перехода от аналоговой к цифровой обработке сигналов (ЦОС).

Возрастающий интерес к ЦОС обусловлен рядом важных преимуществ такой обработки по сравнению с аналоговой и дискретно-аналоговой. Эти преимущества можно разделить на три группы: *принципиальные, реализационные и технико-эксплуатационные* [45].

Принципиальные преимущества ЦОС:

- *многофункциональность обработки*, т.е. возможность использования одного и того же процессора для выполнения различных операторов обработки путём изменения программы;
- *мультиплексирование*, т.е. возможность обработки сигналов от нескольких датчиков (если позволяет быстродействие процессора) в промежутках между смежными тактами;
- *снятие ограничений на виды обработки*, свойственные аналоговой технике, и обеспечивается реализация любых формально описываемых преобразований;
- *отсутствие принципиальных ограничений на сложность обработки*, т.е. имеется принципиальная возможность обеспечивать требуемую точность обработки при сколько угодно сложных алгоритмах.

Реализационные преимущества ЦОС:

- высокая стабильность характеристик;
- повторяемость характеристик (отсутствие индивидуальных признаков);
- уникальные возможности для адаптации (управление характеристиками);
- высокая точность воспроизведения оператора обработки;
- реализация с помощью БИС и СБИС, отсутствие элементов L и C ;
- практически сквозная «цифровизация» аппаратуры.

Технико-эксплуатационные преимущества ЦОС:

- высокая надёжность;
- малые масса и габариты;
- возможности диагностики;
- малое энергопотребление;
- широкие возможности унификации;
- ослабленное электромагнитное влияние и удобства защиты.

Среди **недостатков** цифровой обработке сигналов можно назвать следующие:

- возможность обработки относительно низкочастотных сигналов (в настоящее время ЦОС осуществляют на видео- и промежуточной частотах, а обработка сигналов на высокой производится средствами аналоговой техники);
- шумы квантования, нелинейные эффекты переполнения и предельных циклов;
- зависимость скорости обработки сигналов от требуемой точности;
- влияние проникающей радиации, особенно для интегральных схем n-МОП технологии.

Различают ЦОС в *широком* и в *узком* смысле слова.

ЦОС в широком смысле включает все виды обработки, удовлетворяющие данному выше определению, в том числе и появившиеся в связи с развитием компьютерных технологий операции над массивами данных, такие как архивация файлов, моделирование виртуальной реальности и др. ЦОС в узком смысле включает традиционные для радиотехники, техники связи и экспериментальных исследований операции над сигналами, выполняемые цифровыми методами.

С помощью ЦОС могут быть осуществлены все известные операции над сигналами. Например, на основе цифровой обработки сигналов в радиотехнике и технике связи решаются следующие задачи: генерация, модуляция, разделение, формирование и коррекция сигналов, фильтрация и оценивание, анализ спектров, сжатие сигналов во времени и по частоте, обнаружение и распознавание сигналов, кодирование и декодирование, обработка изображений, синтез речевых сигналов и т.д.

Временная селекция, коммутация цифровых потоков, сложение и умножение последовательностей, интерполяция, децимация, масштабирование (усиление) относятся к числу несложных обработок, в которых выходной отсчёт получается в результате выполнения одной - двух операций. Фильтрация, коррекция, сжатие информации, спектральный анализ, корреляция, оценивание, нелинейные преобразования относятся к числу сложных видов (операций) обработки. Для вычисления выходного отсчёта здесь приходится выполнить

значительное число операций умножения и сложения (практически несколько десятков и даже сотен). ЦОС в узком смысле включает упомянутые сложные операции обработки сигналов.

1.2. Вопрос №2

Задачи, решаемые наукой о ЦОС

Наука о ЦОС изучает принципы и методы построения алгоритмов, программ и технических средств цифровой обработки сигналов. Её проблематика порождается ограниченностью ресурсов вычислительных средств, с помощью которых ЦОС может быть выполнена. Основные задачи, решаемые при проектировании системы ЦОС [45]:

- Исследование и разработка методов синтеза физически возможных операторов G для разнообразных прикладных задач. Например, конструирование импульсных характеристик и передаточных функций линейных фильтров, операторов оценивания параметров сигнала, операторов спектральных преобразований и др.

- Разработка и оптимизация вычислительных алгоритмов. Суть этих процедур состоит в построении эффективных алгоритмов вычисления синтезированных операторов G . Например, построение алгоритмов и структурных схем линейных фильтров, а также нелинейных преобразователей, алгоритмов коррекции и др.

- Анализ качества операторов, алгоритмов и структурных схем (задача анализа). Например, оценка достижимой точности выполнения операторов и алгоритмов, влияния длины слова (разрядности) данных и коэффициентов на финальные параметры системы, анализ устойчивости, чувствительности к изменению параметров, различных нелинейных эффектов, вычислительной сложности, требуемой производительности процессора и др.

- Разработка принципов реализации алгоритмов ЦОС. В зависимости от средств реализации (аппаратные, программные либо смешанные) решаются задачи разработки и оптимизации программ, архитектуры, структуры и функциональных узлов системы ЦОС. Исследуются вопросы отладки программ, диагностики, идентификации ошибок и др.

- Разработка пакетов прикладных программ — элементов систем автоматизированного проектирования (САПР) аппаратуры радиоэлектроники и связи на принципах ЦОС. Существенным здесь является то, какие средства используются для реализации алгоритмов ЦОС, так как именно они решающим образом влияют на ориентацию САПР, особенности математического и программного обеспечения и методики проектирования.

1.3. Вопрос №3

Способы реализации ЦОС

В качестве средств реализации алгоритмов ЦОС могут использоваться программы универсальных либо специализированных ЭВМ, специальные аппаратные либо комбинации аппаратно-программных средств. На первых порах развития ЦОС применялась исключительно программная реализация. Такая же реализация применяется и в настоящее время в тех случаях, если не требуется обработка сигналов в реальном времени. Использовать же универсальные ЭВМ для обработки сигналов в реальном масштабе времени не представляется возможным [45].

Развитие вычислительной техники, компьютерных технологий, методов и средств САПР, высоких технологий производства БИС и СБИС привело к появлению процессоров цифровой обработки сигналов (ПЦОС), чаще называемых сигнальными процессорами (DSP). Сигнальные процессоры, обладая приспособленной для ЦОС архитектурой, позволяют создавать эффективные системы обработки и передачи сигналов в реальном времени.

- Многообразие архитектур ПЦОС, алгоритмов ЦОС, инструментальных средств

моделирования и проектирования выдвигает сегодня на передний план проблему создания сквозной технологии оперативного конструирования систем ЦОС. Такая технология должна представлять собой максимально автоматизированную последовательность этапов проектирования от анализа архитектуры сигнального процессора до анализа характеристик полученной реализации системы ЦОС [7].

Как программный, так и аппаратный способ реализации ЦОС может базироваться либо на временном, либо на спектральном подходе (последний используется для линейных алгоритмов ЦОС).

Временной подход по своей сути является более «физичным», он напоминает физический процесс обработки сигналов в аналоговой системе. При временном подходе реализуется алгоритм обработки (7, в котором по отсчётам входного сигнала $x[n]$ вычисляются отсчёты выходного сигнала $y[n]$).

При спектральном подходе алгоритм обработки G устанавливает связь не между самими сигналами $x[n]$ и $y[n]$, а между их спектрами $X(k)$ и $Y(k)$, получаемыми посредством дискретного преобразования Фурье.

Проектирование устройств цифровой обработки сигналов (ЦОС), в частности, цифровых фильтров (ЦФ) может осуществляться при наличии разработанных методов, соответствующих математического и программного обеспечений, а также технических средств. Всё это составляет основу систем автоматизированного проектирования (САПР).

1.4. Вопрос №4

Классификация цифровых систем

Цифровые системы можно классифицировать по различным признакам:

- по области применения – цифровые системы автоматического управления и цифровые системы преобразования и обработки информации, в свою очередь, цифровые системы преобразования и обработки информации (системы ЦОС) могут являться подсистемой цифровых систем автоматического управления;
- по применимости принципа суперпозиции – системы ЦОС можно разделить на линейные и нелинейные;
- по степени изменения параметров во времени – стационарные и нестационарные;
- по наличию обратных связей – без обратных связей, например КИХ-фильтры, и с обратными связями, например БИХ-фильтры,
- по принципам обработки информации – линейная фильтрация, оптимальная фильтрация, адаптивная фильтрация;
- по составу вычислительных устройств – программные устройства, т.е. работающие под управлением программы (микропроцессоры, микро-ЭВМ), устройства с программируемой структурой
- по другим признакам (технологическим, конструктивным).

2. ЛЕКЦИЯ №2

Тема: **Обобщенная структурная схема устройств ЦОС**

Учебные вопросы: 1. Обобщенная структурная схема устройств ЦОС.
 2. Виды алгоритмов ЦОС.
 3. Структура процессора ЦОС.

2.1. Вопрос №1

Обобщенная структурная схема дискретной системы



$x(t)$ – передаваемое сообщение;

$\xi(t)$ – высокочастотный шум;

ФНЧ1 с частотой среза $f_{ср} \leq f_H = 0.5f_d = 1/(2T)$;

f_H – частота Найквиста;

f_d – частота дискретизации;

T – период дискретизации; °

x_n – оцифрованные отсчеты вх. сигнала;

y_n – оцифрованные отсчеты вых. сигнала;

$y(t)$ – выходной сигнал.

Рисунок 1 – Обобщенная структурная схема дискретной системы

Операции, реализуемые аналого-цифровым преобразователем:

- дискретизация по времени;
- квантование по уровню;
- кодирование.

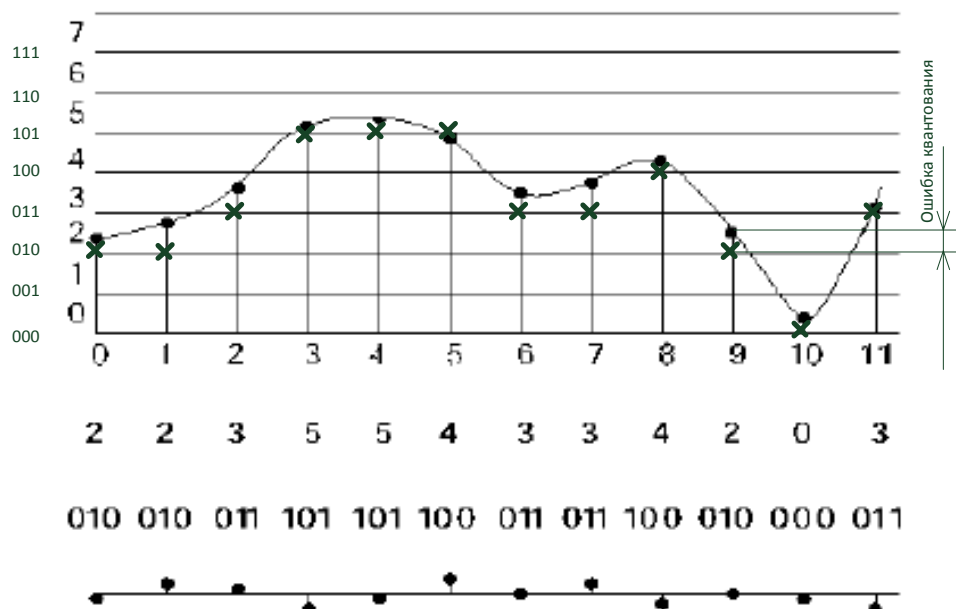


Рисунок 2 – Аналого-цифровое преобразование

2.2. Вопрос №2

Виды алгоритмов ЦОС

Алгоритмы цифровой фильтрации

Среди цифровых фильтров различают два типа:

КИХ-фильтры - с конечной импульсной характеристикой;

БИХ-фильтры – с бесконечной импульсной характеристикой.

2.2.1. Оба типа фильтров относятся к линейным системам с постоянными параметрами, в которых входная x_n и выходная последовательности y_n связаны выражением дискретной свертки:

$$y_n = \sum_{k=0}^{\infty} h_k x_{n-k}, \quad n=0,1,2,\dots, \quad (2.1)$$

где x_n , y_n - отсчеты входного и выходного сигналов; x_{n-k} - отсчеты входного сигнала, задержанного на k интервалов дискретизации; h_k - импульсная характеристика системы.

КИХ-фильтры.

Импульсная характеристика имеет конечную длительность.

Выходной сигнал определяется только входным сигналом и не зависит от выходного сигнала фильтра.

Разностное уравнение КИХ-фильтра имеет вид:

$$y_n = \sum_{k=0}^{N-1} b_k x_{n-k} \quad (2.2)$$

БИХ-фильтры.

Импульсная характеристика имеет бесконечную длительность.

Отсчеты выходного сигнала определяется как отсчетами входного сигнала так и отсчетами выходного сигнала.

Разностное уравнение КИХ-фильтра имеет вид:

$$y_n = \sum_{k=0}^{N-1} b_k x_{n-k} - \sum_{k=1}^{N-1} a_k x_{n-k} \quad (2.3)$$

Спектральный (гармоничный) анализ

При цифровом спектральном анализе сигналов используется пара дискретного преобразования Фурье (ДПФ) – *прямое преобразование Фурье*:

$$\dot{X}_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot \exp(-j \frac{2\pi \cdot nk}{N}). \quad (2.4)$$

и *обратное* дискретное преобразование Фурье:

$$x_k = \sum_{n=0}^{N-1} \dot{X}_n \cdot \exp(j \frac{2\pi \cdot nk}{N}), \quad (2.5)$$

а также рациональный способ реализации дискретного преобразования Фурье – быстрое преобразование Фурье (БПФ).

2.3. Вопрос №3

Структура процессора ЦОС

На рисунке 3 представлена обобщённая структура DSP, отражающая основные операционные особенности процессоров ЦОС в том числе наличие:

- операции умножения с накоплением и задержки для реализации дискретной свертки при реализации алгоритмов цифровой фильтрации;
- операций «бабочка» для реализации алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ);
- операции, обеспечивающие обработку спектра $\arctg()$, $\log_2()$, $\sqrt{\quad}$ и др.

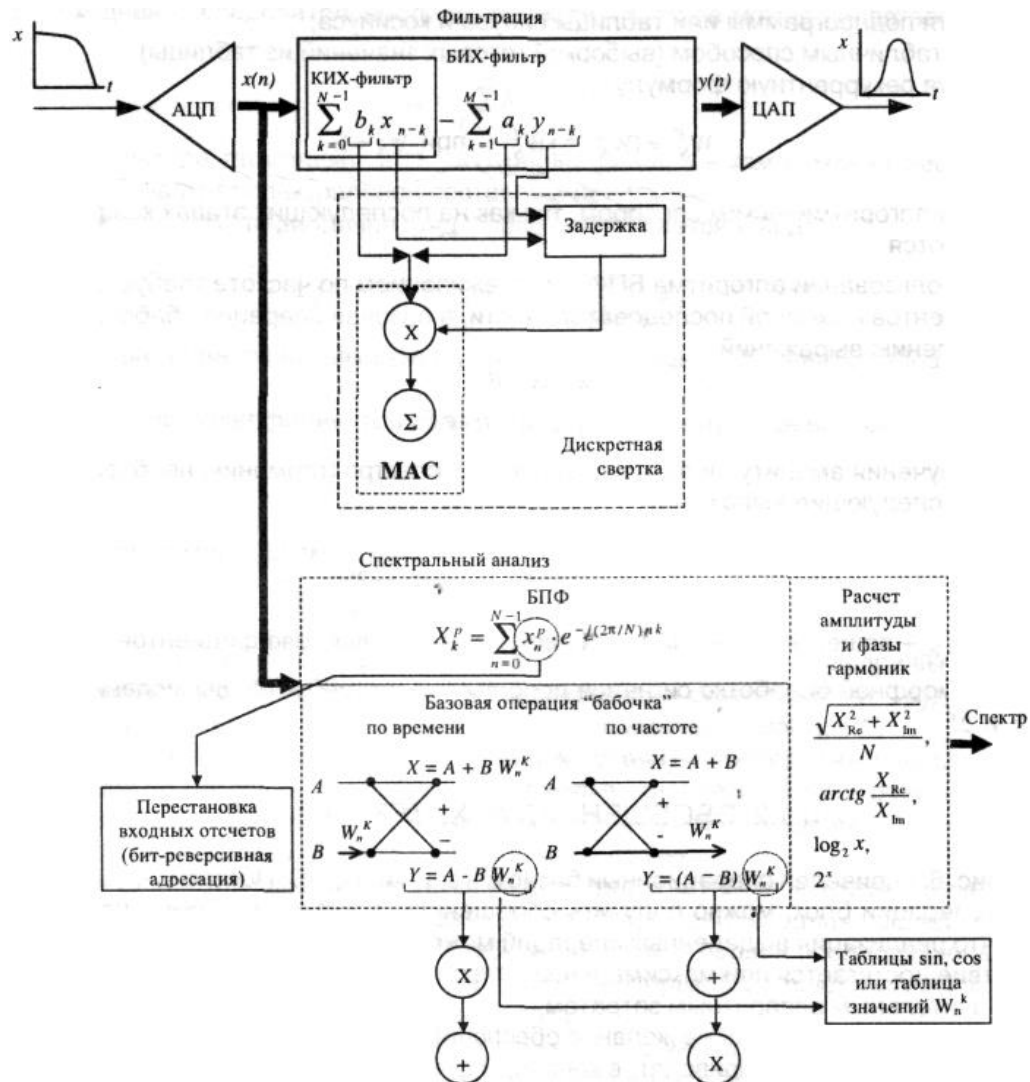


Рисунок 3 – Операционный базис процессоров DSP

РАЗДЕЛ №2 Дискретные сигналы

3. ЛЕКЦИЯ №3

Тема: Аналоговые и дискретные сигналы

Учебные вопросы:

1. Аналоговые и дискретные сигналы.
2. Аналого-цифровое и цифро-аналоговое преобразование.
3. Спектр дискретного сигнала. Связь между аналоговыми и дискретными сигналами.

3.1. Вопрос №1

Аналоговые и дискретные сигналы

Сущность цифровой обработки состоит в том, что *физический* сигнал (напряжение, ток и т. д.) преобразуется в последовательность *чисел*, которая затем подвергается *математическим* преобразованиям в вычислительном устройстве. Трансформированный цифровой сигнал (последовательность чисел) при необходимости может быть преобразован обратно в напряжение или ток.

В данной лекции будут рассмотрены принципы математического описания и анализа дискретных сигналов.

Исходный физический сигнал является *непрерывной* функцией времени. Такие сигналы, определенные во все моменты времени, называют *аналоговыми* (analog). Последовательность чисел, представляющая сигнал при цифровой обработке, является *дискретным рядом* (discrete series) и не может полностью соответствовать аналоговому сигналу. Числа, составляющие последовательность, являются значениями сигнала в отдельные (дискретные) моменты времени и называются *отсчетами* сигнала (samples). Как правило, отсчеты берутся через равные промежутки времени T , называемые *периодом дискретизации* (или *интервалом, шагом дискретизации* — sample time). Величина, обратная периоду дискретизации, называется *частотой дискретизации* (sampling frequency): $f_d = 1/T$. Соответствующая ей круговая частота определяется следующим образом: $\omega_d = 2\pi / T$

Ясно, что в общем случае представление сигнала набором дискретных отсчетов приводит к потере информации, так как мы ничего не знаем о поведении сигнала в промежутках между отсчетами. Однако, как будет показано далее в разделе «Теорема Котельникова», существует класс аналоговых сигналов, для которых такой потери информации не происходит и которые могут быть *точно* восстановлены по значениям своих дискретных отсчетов.

Процесс преобразования аналогового сигнала в последовательность отсчетов называется *дискретизацией* (sampling), а результат такого преобразования — *дискретным сигналом*. При обработке сигнала в вычислительных устройствах его отсчеты представляются в виде двоичных чисел, имеющих ограниченное число разрядов. Вследствие этого отсчеты могут прини-

мать лишь конечное множество значений и, следовательно, при представлении сигнала неизбежно происходит его округление. Процесс преобразования отсчетов сигнала в числа называется *квантованием по уровню* (quantization), а возникающие при этом ошибки округления — *ошибками (или шумами) квантования* (quantization error, quantization noise).

Сигнал, дискретный во времени, но не квантованный по уровню, называется *дискретным* (discrete-time) сигналом. Сигнал, дискретный во времени и квантованный по уровню, называют *цифровым* (digital) сигналом. Сигналы, квантованные по уровню, но непрерывные во времени, на практике встречаются редко. Разницу между аналоговыми, дискретными и цифровыми сигналами иллюстрирует рис. 1.

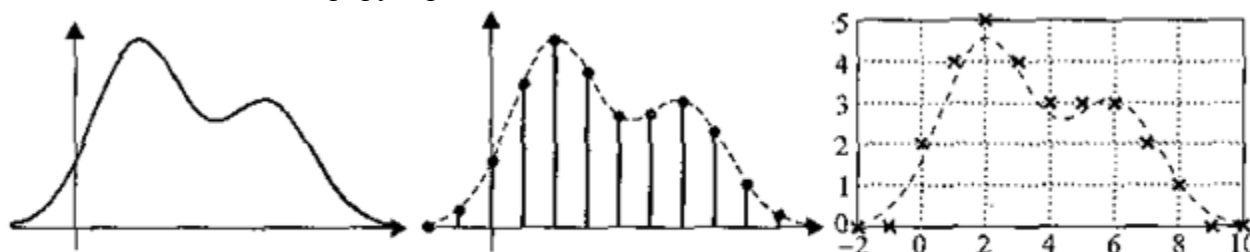


Рис. 1 — Аналоговый (слева), дискретный (в центре) и цифровой (справа) сигналы

Вычислительные устройства, предназначенные для обработки сигналов, могут оперировать только цифровыми сигналами. Существуют также устройства, построенные в основном на базе аналоговой схемотехники, которые работают с дискретными сигналами, представленными в виде импульсов различной амплитуды или длительности. Чтобы подчеркнуть отсутствие квантования по уровню, такие устройства иногда называют *дискретно-аналоговыми* (ДАУ).

Мы говорим о *дискретных* сигналах и методах их обработки, поскольку эффекты, связанные с квантованием по уровню, в большинстве случаев не будут приниматься во внимание.

3.2. Вопрос №2

Аналого-цифровое и цифро-аналоговое преобразование

Обобщенная структура системы цифровой обработки сигналов приведена на рис. 3.2. На вход поступает аналоговый сигнал $s_{вх}(t)$. Его временная дискретизация и квантование по уровню производятся в *аналого-цифровом преобразователе* (АЦП; английский термин — Analog-to-Digital Converter, ADC). Вообще эти два процесса — дискретизация и квантование — являются независимыми друг от друга, но они, как правило, выполняются внутри одной микросхемы. Выходным сигналом АЦП является последовательность чисел, поступающая в цифровой процессор ЦП, выполняющий требуемую обработку. Процессор осуществляет различные математические операции над входными отсчетами; ранее полученные отсчеты и промежуточные результаты могут сохраняться в памяти процессора для использования в последующих вычислениях. Результатом работы процессора является новая последовательность чисел, представляющих собой отсчеты выходного сигнала. Аналоговый выходной сигнал $s_{вых}(t)$ восстанавливается по этой последовательности чисел с помощью *цифро-аналогового преобразователя* (ЦАП; английский термин — Digital-to-Analog Converter, DAC). Напряжение на выходе ЦАП имеет ступенчатую форму (это также показано на рис. 2); при необходимости оно может быть преобразовано в плавно меняющийся выходной сигнал с помощью сглаживающего фильтра Ф.



$x(t)$ – передаваемое сообщение;

$\xi(t)$ – высокочастотный шум;

ФНЧ1 с частотой среза $f_{ср} \leq f_H = 0.5f_d = 1/(2T)$;

f_H – частота Найквиста;

f_d – частота дискретизации;

T – период дискретизации; .

x_n – оцифрованные отсчеты вх. сигнала;

y_n – оцифрованные отсчеты вых. сигнала;

$y(t)$ – выходной сигнал.

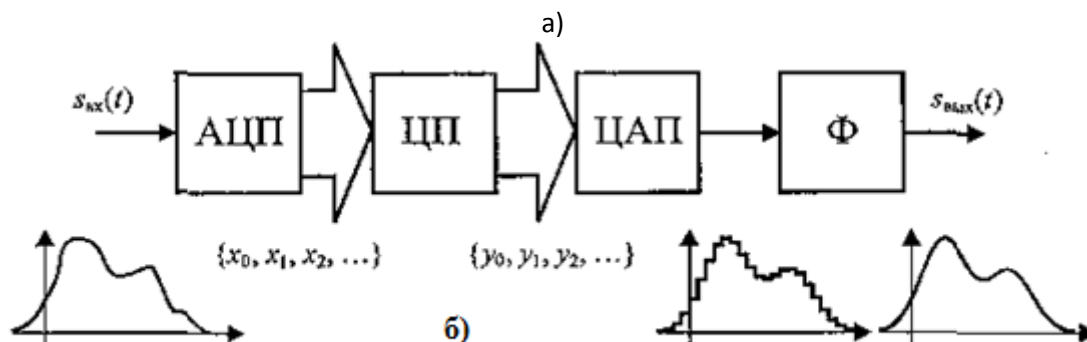


Рис. 2 – Структурная схема системы цифровой обработки сигналов

а – подробная схема, б – упрощенная схема

Устройства, реализуемые с помощью структуры типа рис. 2, могут иметь самый разнообразный характер. В цифровой форме можно создавать фильтры, анализаторы спектра, нелинейные преобразователи сигналов и многое другое.

1.1 Частота Найквиста

Гармонический сигнал может быть адекватно представлен дискретными отсчетами, если его частота не превышает половины частоты дискретизации (эта частота называется *частотой Найквиста* (Nyquist frequency) — $f_N = f_d / 2 = 1/(2T)$; $\omega_N = \omega_d / 2 = \pi / T$). Происхождение этого ограничения поясняет рис. 3.3. В зависимости от соотношения между частотой дискретизируемого гармонического сигнала и частотой Найквиста возможны три случая.

1. Если частота гармонического сигнала *меньше* частоты Найквиста, дискретные отсчеты позволяют правильно восстановить аналоговый сигнал (рис. 3, а).

2. Если частота гармонического сигнала *равна* частоте Найквиста, то дискретные отсчеты позволяют восстановить аналоговый гармонический сигнал с той же частотой, но амплитуда и фаза восстановленного сигнала (он показан пунктирной линией) могут быть искажены (рис. 3.3, б). В худшем случае все дискретные отсчеты синусоиды могут оказаться равными нулю.

3. Если частота гармонического сигнала *больше* частоты Найквиста, восстановленный по дискретным отсчетам аналоговый сигнал (как и в предыдущем случае, он показан пунктирной линией) будет также гармоническим, но с иной частотой (рис. 3, в). Данный эффект носит название *появления ложных частот* (aliasing).

4. Если частота гармонического сигнала *больше* частоты Найквиста, восстановленный по дискретным отсчетам аналоговый сигнал (как и в предыдущем случае, он показан пунктирной линией) будет также гармоническим, но с иной частотой (рис. 3, в). Данный эффект носит название *появления ложных частот* (aliasing).

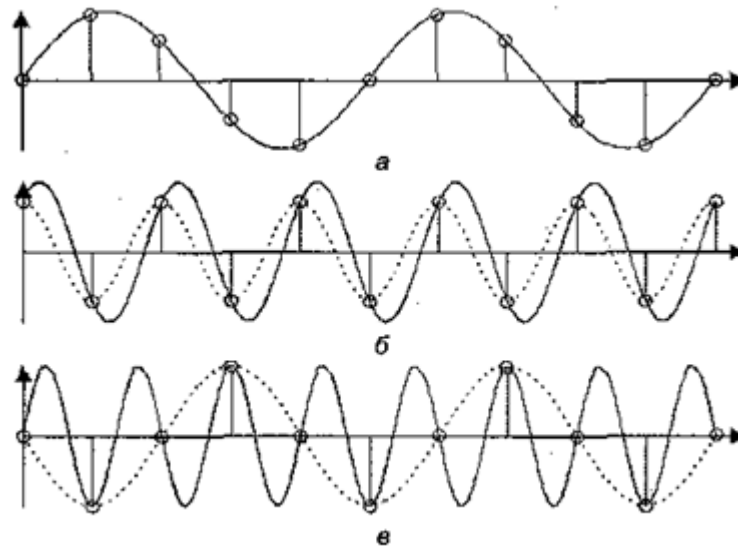


Рис. 3. – Дискретизация гармонических сигналов с разной частотой

3.3. Вопрос №3

Спектр дискретного сигнала.

Связь между аналоговыми и дискретными сигналами

Преобразование Фурье позволяет вычислить спектральную плотность сигнала, представляющего собой *функцию* (как правило, времени либо пространственных координат). Дискретный же сигнал является *последовательностью чисел*, поэтому для анализа его спектра обычными (аналоговыми) средствами необходимо сопоставить этой последовательности некоторую функцию.

Традиционным способом такого сопоставления является представление отсчетов в виде дельта-функций с соответствующими множителями и задержками. Для последовательности отсчетов $\{x(k)\}$ получится следующий сигнал:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \delta(t - k) \quad (3.1)$$

Преобразование Фурье линейно, спектр дельта-функции равен единице, а задержка сигнала во времени приводит к умножению спектра на комплексную экспоненту. Все это (см. раздел «Свойства преобразования Фурье» главы 1) позволяет сразу же записать спектр дискретного сигнала:

$$S(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j\omega k} \quad (3.2)$$

Из этой формулы видно главное свойство спектра любого дискретного сигнала: спектр является периодическим, и его период в данном случае равен 2π (то есть круговой частоте дискретизации, поскольку, составляя сигнал из дельта-функций, мы выбрали единичный интервал между ними, что дает $\omega_D = 2\pi$):

$$S(\omega \pm 2\pi) = S(\omega)$$

Следует также обратить внимание на размерность спектральной функции дискретного сигнала: она совпадает с размерностью отсчетов. Это связано с тем, что дельта-функции времени, из которых был составлен сигнал (3.1), имеют размерность частоты (см. раздел «Классификация сигналов» главы 1).

Формула (3.2) позволяет вычислить спектральную функцию по известным отсчетам $x(k)$. При конечном числе ненулевых отсчетов этот расчет несложен; он может быть выполнен с помощью функции MATLAB `freqz` (подробнее об этой функции см. раздел «Расчет частотной характеристики» главы 4).

Теперь рассмотрим несколько иную задачу. Пусть значения $x(k)$ являются отсчетами аналогового сигнала $s(t)$, взятыми с периодом T :

$$x(k) = s(kT).$$

Выясним, как в этом случае спектр дискретного сигнала (3.2) связан со спектром аналогового сигнала $S(\omega)$.

Итак, мы рассматриваем *дискретизированный* сигнал в виде последовательности дельта-функций, «взвешенной» значениями отсчетов $s(kT)$ аналогового сигнала $s_x(t)$ (рис. 4):

$$s_d(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(kT)\delta(t - kT) \quad (3.3)$$

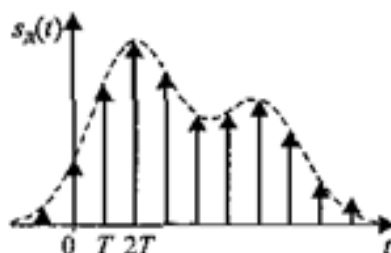


Рис. 3. — Дискретизированный сигнал в виде последовательности дельта-функций

Так как функция $\delta(t - kT)$ равна нулю всюду, кроме момента $t = kT$, можно заменить в выражении (3) константы $s(kT)$ на исходный непрерывный сигнал $s(t)$:

$$s_d(t) = s(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kt) \quad (3.4)$$

Далее заметим, что сумма, входящая в выражение (4), является периодическим сигналом, а потому может быть представлена в виде ряда Фурье. Коэффициенты этого ряда равны

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-j\omega_n t} dt = \frac{1}{T} \quad (3.5)$$

В формуле (5) было учтено, что в интервал интегрирования $(-T/2, T/2)$ попадает только одна дельта-функция, соответствующая $k = 0$.

Таким образом, периодическая последовательность дельта-функций может быть представлена в виде комплексного ряда Фурье:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_n t} \quad (3.6)$$

где $\omega_n = 2\pi n/T$. Подставив (6) в (4), получим

$$s_d(t) = \frac{s(t)}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_n t} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(t) e^{j\omega_n t} \quad (3.7)$$

Умножение сигнала на $\exp(j\omega_n t)$ соответствует сдвигу спектральной функции на ω_n , поэтому спектр дискретизированного сигнала можно записать следующим образом:

$$S_d(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(\omega - \frac{2\pi n}{T}) \quad (3.8)$$

Таким образом, спектр дискретизированного сигнала представляет собой бесконечный ряд сдвинутых копий спектра исходного непрерывного сигнала $s(t)$ (рис. 5). Расстояние по частоте между соседними копиями спектра равно частоте дискретизации $\omega_d = 2\pi/T$.

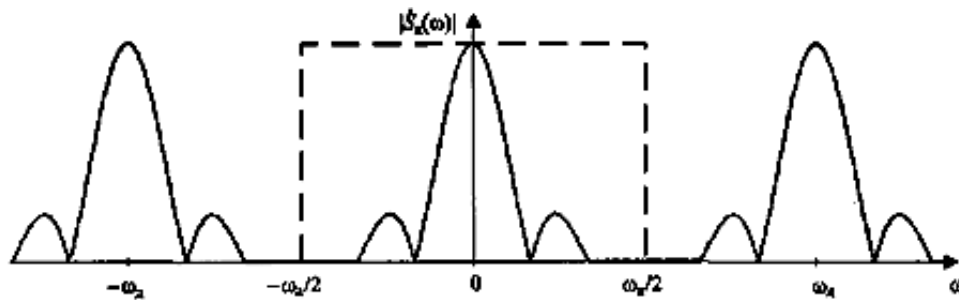


Рис. 5. Спектр дискретизированного сигнала

Следует также отметить, что из-за наличия в формуле (7) множителя $1/T$ спектр дискретизированного сигнала имеет размерность, совпадающую с размерностью сигнала (как уже говорилось, это связано с тем, что функция $\delta(t)$ имеет размерность частоты).

Характер спектра дискретизированного сигнала еще раз демонстрирует частотно-временную дуальность преобразования Фурье:

- периодический сигнал \rightarrow дискретный спектр;
- периодический спектр \rightarrow дискретный сигнал.

В начале данного раздела мы получили формулу (2), позволяющую рассчитать спектр последовательности отсчетов $\{x(k)\}$, никак не связывая эти отсчеты с аналоговым сигналом. Только что полученная формула (7) предполагает, что отсчеты $\{x(k)\}$ получены путем дискретизации аналогового сигнала $s(t)$, и показывает связь между спектрами дискретизированного и аналогового сигналов. Следует подчеркнуть, что эти две формулы дают *одинаковый результат*.

Отсюда следует еще один важный факт. Соединить отсчеты $\{x(k)\}$ для получения аналогового сигнала можно произвольным образом. В каждом случае аналоговый сигнал будет, разумеется, иметь свой спектр. Однако результат *суммирования* сдвинутых копий спектров по формуле (7) всегда будет одним и тем же, поскольку определяется только значениями дискретных отсчетов $\{x(k)\} = \{s(kT)\}$ и формулой (2).

Рисунок 5 наглядно демонстрирует и способ восстановления непрерывного сигнала по дискретным отсчетам. Для этого необходимо пропустить дискретный сигнал через идеальный фильтр нижних частот (ФНЧ) с частотой среза, равной половине частоты дискретизации. АЧХ такого фильтра показана на рис. 5 пунктиром.

Очевидно, что точное восстановление сигнала возможно, если сдвинутые копии спектра не перекрываются. Из рис. 5 видно, что для этого необходимо, чтобы частота дискретизации как минимум в два раза превышала верхнюю граничную частоту в спектре сигнала:

$$\omega_D > 2\omega_B \quad (3.9)$$

Спектральное представление дискретного сигнала позволяет объяснить появление *ложных частот* (aliasing). Пусть дискретизации подвергается гармонический сигнал с частотой ω_0 , превышающей частоту Найквиста, но меньшей частоты дискретизации. Спектр такого сигнала показан на рис. 6 сверху. Сдвинутые копии спектра, возникающие при дискретизации, создают попадающие в полосу восстановления (от нуля до частоты Найквиста) спектральные составляющие с частотой $\omega_D - \omega_0$ (рис. 6, снизу). Спектры, получающиеся после дискретизации гармонических сигналов с частотами ω_0 и $\omega_D - \omega_0$, оказываются идентичными. Данный рисунок иллюстрирует в частотной области процесс дискретизации гармонического сигнала, показанный ранее на рис. 3.

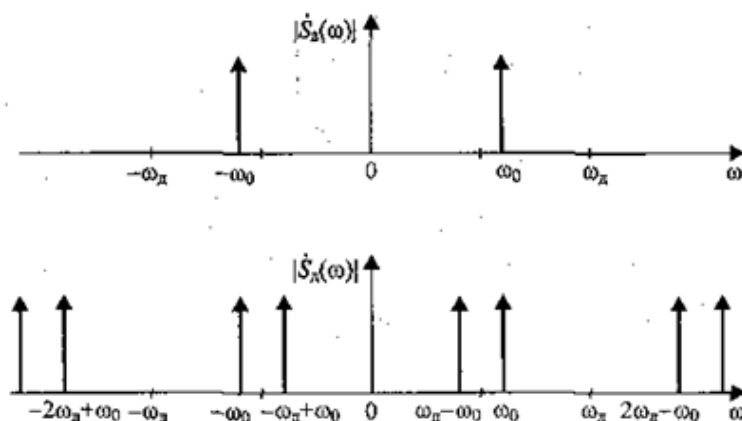


Рис. 6. – Спектры аналоговой (сверху) и дискретизированной (снизу) синусоиды с частотой, превышающей частоту Найквиста

В случае произвольного сигнала, если условие (9) не выполняется, сдвинутые копии спектра будут накладываться друг на друга, что приведет к неизбежным искажениям при восстановлении непрерывного сигнала (рис. 7).

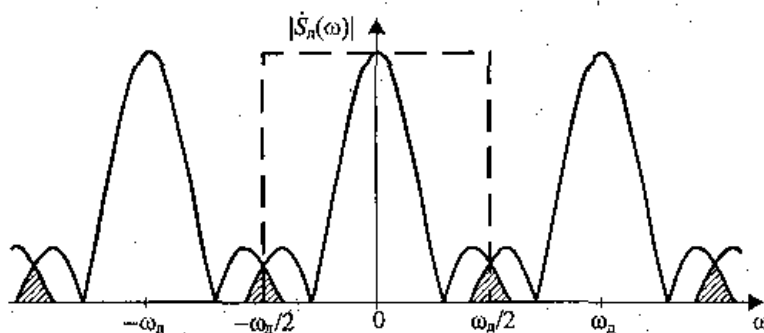


Рис. 3.7. Перекрывание сдвинутых копий спектра при недостаточно высокой частоте дискретизации

Эти искажения вызваны тем, что спектральные составляющие сигнала с частотами, превышающими частоту Найквиста, равную $\omega_D/2$, не могут быть восстановлены правильно — вместо этого они вызывают наложение «хвостов» соседних сдвинутых копий спектра и появление ложных частот.

Если подлежащий дискретизации сигнал может содержать спектральные составляющие с частотами, превышающими частоту Найквиста, полезно предварительно пропустить его че-

рез ФНЧ с частотой среза, равной частоте Найквиста (рис. 2 и рис. 8). При этом все равно будут потеряны высокочастотные составляющие — сохранить их можно лишь путем повышения частоты дискретизации. Однако в этом случае благодаря отсутствию наложения «хвостов» не произойдет появления ложных частот и диапазон частот $0 \dots \omega_D/2$ будет представлен в дискретном сигнале без искажений.

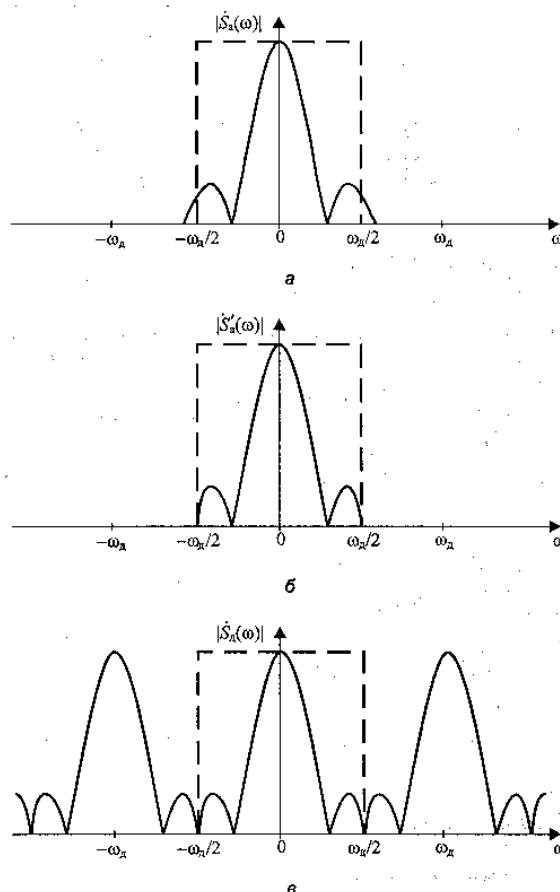


Рис. 3.8. При дискретизации сигнала, содержащего высокочастотные составляющие (а), полезно пропустить его через ФНЧ (б), чтобы избежать появления ложных частот (в)

РАЗДЕЛ №3 Математические основы цифровой обработки сигналов

4. ЛЕКЦИЯ №4

Z-преобразование

Учебные вопросы:

1. Прямое Z-преобразование.
2. Связь с преобразованием Лапласа.

4.1. Вопрос №1

Прямое Z-преобразование

Удобным способом анализа дискретных последовательностей является z-преобразование (z-transform). Смысл его заключается в том, что последовательности чисел $\{x(k)\}$ ставится в соответствие функция комплексной переменной z , определяемая следующим образом:

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) z^{-k}. \quad (4.1)$$

Разумеется, функция $X(z)$ определена только для тех значений z , при которых ряд (1) сходится.

Z-преобразование играет для дискретных сигналов и систем такую же роль, как преобразование Лапласа — для аналоговых. Определяющим при этом является тот факт, что, как мы увидим в главе 4, z-преобразование импульсной характеристики дискретной системы является дробно-рациональной функцией переменной Z .

Примеры вычисления z-преобразования

Вычислим z-преобразование для некоторых часто встречающихся на практике дискретных сигналов.

Единичная импульсная функция

Единичная импульсная функция является дискретным аналогом дельта-функции (см. раздел «Классификация сигналов» главы 1) и представляет собой одиночный отсчет с единичным значением:

$$x_0(k) = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}$$

Расчет его z-преобразования не представляет сложности:

$$X_0(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_0(k) z^{-k} = 1 \cdot z^{-0} = 1.$$

Функция $X_0(z)$ сходится на всей комплексной плоскости.

Единичный скачок

Дискретный единичный скачок по смыслу полностью соответствует своему аналоговому прообразу.

$$x_0(k) = \begin{cases} 1, & k < 0, \\ 0, & k \geq 0. \end{cases}$$

Используя определение z-преобразования (3.16), получаем

$$X_0(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-k}.$$

Ряд (3.18) является суммой бесконечной геометрической прогрессии с первым членом $1 \cdot z^{-0} = 1$ и знаменателем z^{-1} . Как известно, такой ряд сходится при $|z^{-1}| < 1$, то есть при $|z| > 1$, и его сумма равна

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}.$$

Дискретная экспоненциальная функция

Дискретная экспоненциальная функция определяется следующим образом:

$$x(k) = \begin{cases} 0, & k < 0, \\ a^k, & k \geq 0. \end{cases}$$

Для вычисления z-преобразования нужно вычислить сумму следующего ряда:

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (a^{-1}z)^{-k}.$$

Как и в предыдущем случае, этот ряд представляет собой сумму геометрической прогрессии. Первый член равен 1, знаменатель равен az^{-1} . Таким образом, ряд сходится при $|az^{-1}| < 1$, то есть при $|z| > |a|$, а его сумма равна

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}.$$

Дискретная затухающая синусоида

Последняя из рассматриваемых здесь дискретных последовательностей представляет собой отсчеты синусоиды с произвольными частотой и начальной фазой и экспоненциально меняющейся амплитудой:

$$x(k) = a^k \cos(\omega k + \varphi).$$

Для вычисления z-преобразования можно представить косинус по формуле Эйлера в виде полусуммы двух комплексных экспонент, а потом воспользоваться уже готовым результатом (3.20):

$$X(z) = \frac{\cos \varphi - a \cos(\omega - \varphi)z^{-1}}{1 - 2a \cos(\omega)z^{-1} + z^{-2}}.$$

Так же как и в случае дискретной экспоненты, ряд сходится при $|a| > |z|$. Связь z-преобразования с преобразованиями Лапласа и Фурье.

4.2. Вопрос №2

Связь с преобразованием Лапласа

Дискретное z-преобразование очень просто связано с преобразованиями Лапласа и Фурье. Рассмотрим последовательность, определенную при $k \geq 0$, и сопоставим ей временной сигнал в виде набора дельта-функций:

$$s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)\delta(t - kT) \quad (4.2)$$

где $T = 1/f$ — интервал дискретизации. Преобразование Лапласа для сигнала равно:

$$S(p) = \int_0^{\infty} s(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x(k) \delta(t - kT) e^{pt} dt = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) \int_0^{\infty} \delta(t - kT) e^{-pt} dt.$$

Воспользовавшись фильтрующим свойством дельта-функции, получим

$$S(p) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) e^{-pkT}. \quad (4.3)$$

Эта формула представляет *дискретное преобразование Лапласа* (ДПЛ) решётчатой функции $x[n]$, в которой $q = pT = \sigma + j\omega T$ — комплексная переменная. Эта формула переходит в выражение (1), определяющую z -преобразование, если выполнить подстановку $z = e^q = e^{pT}$.

Характерной особенностью ДПЛ является то, что комплексный аргумент q входит в изображение $X(q)$ в виде показателя экспоненты e^q . Но комплексная экспонента e^q является периодической функцией в Q -плоскости с периодом, равным $2\pi j$, т.е. $e^{q+j2\pi k} = e^q$, где k — произвольное целое число, поэтому изображение $X(q)$ решётчатой функции $x[n]$ полностью определяется в любой полосе Q -плоскости шириной 2π , параллельной вещественной оси. Обычно эта полоса выбирается симметрично по отношению к вещественной оси, как показано на рис. 1, б, и называется *основной*.

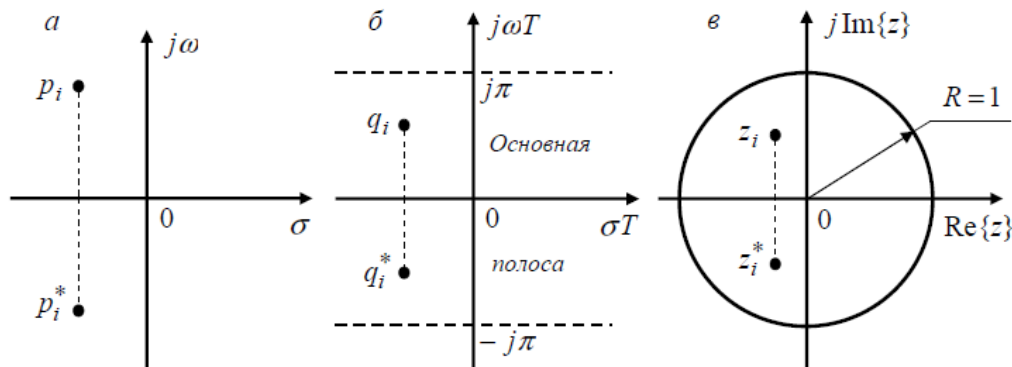


Рис. 1. Расположение комплексно-сопряжённых полюсов изображений вещественных сигналов $x(t)$ и $x[n]$: а — P -плоскость; б — Q -плоскость; в — Z -плоскость

При $\text{Re}(q) < \sigma_0 T$ функция $X(q)$ может иметь особые точки — *полюсы*, в которых $X(q)$ обращается в бесконечность. Если решётчатая функция $x[n]$ является вещественной, то в симметричной относительно оси σT полосе каждому комплексному полюсу $q_i = \sigma_i T + j\omega_i T$ функции $X(q)$ соответствует комплексно-сопряжённый полюс $q_i^* = \sigma_i T - j\omega_i T$. Для комплексных решётчатых функций $x[n]$ это утверждение не справедливо.

ДПЛ позволяет производить над разностными уравнениями такие же алгебраические действия, какие допускает обычное преобразование Лапласа над интегро-дифференциальными уравнениями. Однако проведение алгебраических действий над ДПЛ неудобно из-за того, что в выражении $X(q)$ фактическим аргументом является экспонента e^q .

Для устранения этого недостатка вводится новая комплексная переменная

$$z = e^q = e^{pT} = \exp(\sigma T + j\omega T). \quad (4.4)$$

Замена комплексной переменной приводит к отображению одной комплексной плоскости в другую. При замене (2) левая полуплоскость P -плоскости и левая часть основной полосы Q -плоскости преобразуются в круг единичного радиуса с центром в начале координат (рис. 1, в).

С учётом обозначения (4) формулу (3) перепишем в виде

$$X(z) = Z\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}. \quad (4.5)$$

Полученное выражение является главной частью ряда Лорана, Лорана, представляющего функцию $X(z)$ в Z -плоскости. Функция комплексного аргумента $X(z)$ есть одностороннее Z -преобразование или просто Z -преобразование решётчатой функции $x[n]$.

Если оригиналы $x(t)$ и $x[n]$ являются вещественными функциями, то комплексным полюсам их изображений $X(p)$ в P -плоскости, $X(q)$ в Q -плоскости и $X(z)$ в Z -плоскости соответствуют комплексно-сопряжённые полюсы в этих плоскостях (на рис.1.1 полюсы p_i и p_i^* , q_i и q_i^* , z_i и z_i^*). В случае же комплексных оригиналов $x(t)$ и $x[n]$ это свойство не выполняется.

Как видно из сопоставления выражений (1.13), (1.14) и (1.15), Z -преобразование тесно связано с ДПЛ и прямо вытекает из него. Вследствие замены переменной (1.14) выражения $X(z)$ выглядят проще, чем $X(q)$, к тому же изображения $X(z)$ однозначны и в большинстве практически важных случаев имеют дробно-рациональный вид. По этой причине аппарат Z -преобразований получил более широкое распространение для описания дискретных систем, чем аппарат ДПЛ.

Таким образом, взаимное соответствие между z -преобразованием $X(z)$ и преобразованием Лапласа $S(p)$ описывается следующим образом:

$$X(z) = S\left(1 \frac{1}{T} \ln z\right),$$

$$S(p) = X(e^{pT}).$$

Похожими формулами описывается и связь z -преобразования $X(z)$ с преобразованием Фурье $S(\omega)$ (заметим, что при рассмотрении этой связи нет необходимости считать последовательность односторонней):

$$X(z) = S\left(1 \frac{1}{jT} \ln z\right),$$

$$S(\omega) = X(e^{j\omega T}).$$

В табл. 4.1 приведены некоторые встречающиеся на практике решётчатые функции $x[n]$ и их Z -преобразования $X(z)$.

Т а б л и ц а 4.1

Оригинал $x[n] = Z^{-1}\{X(z)\}$	Изображение $X(z) = Z\{x[n]\}$
1	2
$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$	1
$\sigma[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0 \end{cases}$	$\frac{z}{z-1}$
n	$\frac{z}{(z-1)^2}$
n^2	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
n^3	$\frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$
$n(n-1)$	$\frac{2z}{(z-1)^3}$
$n(n-1)(n-2)\cdots(n-k)$	$(k+1)! \frac{z}{(z-1)^{k+2}}$
a^n	$\frac{z}{z-a}$
e^{an}	$\frac{z}{z-e^a}$
$1-e^{an}$	$\frac{z(1-e^a)}{(z-e^a)(z-1)}$

1	2
$1 - e^{a(n+1)}$	$\frac{z^2(1 - e^a)}{(z - e^a)(z - 1)}$
$1 - e^{a(n-1)}$	$\frac{1 - e^{-a}}{(z - e^a)(z - 1)}$
$1 - e^{a(n-k)}$	$\frac{z^{-k+1}(1 - e^a)}{(z - e^a)(z - 1)}$
$Ae^{an} + Be^{bn}$	$\frac{z^2(A + B) - z(Ae^b + Be^a)}{(z - e^a)(z - e^b)}$
ne^{an}	$\frac{ze^a}{(z - e^a)^2}$
n^2e^{an}	$\frac{ze^a(z + e^a)}{(z - e^a)^3}$
$(1 - bn)e^{an}$	$\frac{z^2 - ze^a(1 + b)}{(z - e^a)^2}$
$(-1)^ne^{an}$	$\frac{z}{z + e^a}$
$(-1)^n$	$\frac{z}{z + 1}$
$\sin(\omega Tn)$	$\frac{z \sin(\omega T)}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1}$
$\cos(\omega Tn)$	$\frac{z[z - \cos(\omega T)]}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1}$
$(-1)^n \sin(\omega Tn)$	$\frac{-z \sin(\omega T)}{z^2 + 2z \cos(\omega T) + 1}$
$(-1)^n \cos(\omega Tn)$	$\frac{z[z + \cos(\omega T)]}{z^2 + 2z \cos(\omega T) + 1}$

5. ЛЕКЦИЯ №5

Свойства Z-преобразования

Учебные вопросы:

1. Линейность.
2. Задержка.
3. Свертка.
4. Обратное z-преобразование.

5.1. Вопрос №1

Линейность

Тесная связь z-преобразования с преобразованиями Фурье и Лапласа обуславливает и подобие свойств этих преобразований. Однако имеется и некоторая специфика, возникающая из-за дискретного характера рассматриваемых сигналов.

Z-преобразование, согласно определению (3.16), является линейной комбинацией отсчетов последовательности, поэтому оно подчиняется принципу суперпозиции:

если $\{x_1(k)\} \leftrightarrow X_1(z)$ и $\{x_2(k)\} \leftrightarrow X_2(z)$,

то $\{a x_1(k) + b x_2(k)\} \leftrightarrow a X_1(z) + b X_2(z)$.

5.2. Вопрос №2

Задержка

Если z-преобразование последовательности $\{x(k)\}$ равно $X(z)$, то z-преобразование последовательности, задержанной на k_0 тактов ($y(k)=x(k-k_0)$), будет иметь вид

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(k) z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k-k_0) z^{-k} = \\ &= z^{-k_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k-k_0) z^{-(k-k_0)} = z^{-k_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = X(z) z^{-k_0}. \end{aligned}$$

Таким образом, при задержке последовательности на k_0 тактов необходимо умножить ее z-преобразование на z^{-k_0} . Множитель z^{-k_0} является *оператором задержки* дискретной последовательности на k_0 тактов.

5.3. Вопрос №3

Свертка

Теорема об умножении изображений (теорема о свёртке оригиналов)

Имеются Z-преобразования $X(z)=Z\{x[n]\}$ и $H(z)=Z\{h[n]\}$ двух решётчатых функций $x[n]$ и $h[n]$. Возникает задача определения решётчатой функции $y[n]=Z^{-1}\{X(z) H(z)\}$, Z-изображение которой равно произведению Z-преобразований $X(z)$ и $H(z)$, т.е. $Y(z)=Z\{y[n]\}=X(z)H(z)$.

В соответствии с (4.5) запишем

$$Y(z) = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} x[k] z^{-k} \right\} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} h[m] z^{-m} \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} x[k] h[m] z^{-(k+m)}. \quad (5.1)$$

Сделаем в (5.1) замену переменных $n=k+m$, где n изменяется от 0 до ∞ . Тогда, полагая $m=n-k$, получим

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x[k] h[n-k] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} x[k] h[n-k] \right\} z^{-n}. \quad (5.2)$$

Сравнивая это выражение с формулой (4.5), приходим к искомому результату

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} x[k] h[n-k]. \quad (5.3)$$

Если в выражении (5.1) положить $k=n-m$, то будем иметь

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} x[n-m] h[m] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} x[n-m] h[m] \right\} z^{-n}. \quad (5.4)$$

Сравнивая (5.4) с (4.5), приходим к другому выражению для $y[n]$:

$$y[n] = \sum_{m=0}^{\infty} x[n-m] h[m]. \quad (5.5)$$

Соотношения (5.3) и (5.5) называются формулами дискретной свёртки решётчатых функций. Обращаем внимание на симметрию операции свёртки относительно свёртываемых функций.

Таким образом, операции умножения двух Z-изображений соответствует операция свёртки их оригиналов (решётчатых функций).

– Теорема об умножении оригиналов (теорема о свёртке изображений)

Имеются две решётчатые функции $x[n]$ и $h[n]$, Z-изображения которых $X(z)=Z\{x[n]\}$ и $H(z)=Z\{h[n]\}$. Возникает задача нахождения Z-изображения произведения решётчатых функций $Y(z)=Z\{y[n]\}=Z\{x[n] h[n]\}$. По определению Z-преобразования (4.5)

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] h[n] z^{-n}. \quad (5.6)$$

В формуле (5.6)) выразим функцию $h[n]$ через обратное Z-преобразование от комплексной переменной v :

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n} \left[\frac{1}{2\pi j} \oint_C H(v) v^{n-1} dv \right]. \quad (5.7)$$

Изменяя в (5.7) порядок следования операций суммирования и интегрирования, получим

$$Y(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} x[n] \left(\frac{z}{v} \right)^{-n} \right\} H(v) v^{-1} dv. \quad (5.8)$$

Выражение в фигурных скобках является Z-преобразованием решётчатой функции $x[n]$ от комплексной переменной z/v , поэтому $H v v dv$

$$Y(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X\left(\frac{z}{v}\right) H(v) v^{-1} dv. \quad (5.9)$$

Из формулы (5.7) следует, что контур интегрирования C в выражении (1.63) охватывает только полюсы функции $H(v) v^{-1}$, но не охватывает полюсы функции $X(z/v)$.

Выразим теперь в формуле (5.6) функцию $x[n]$ через обратное Z-преобразование от комплексной переменной v :

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi j} \oint_C X(v) v^{n-1} dv \right] h[n] z^{-n}. \quad (5.10)$$

Изменяя в (5.10) порядок следования операций суммирования и интегрирования, получим

$$Y(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(v) \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} h[n] \left(\frac{z}{v} \right)^{-n} \right\} v^{-1} dv. \quad (5.11)$$

Выражение в фигурных скобках является Z-преобразованием решётчатой функции $h[n]$ от комплексной переменной z/v , поэтому

$$Y(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(v) H\left(\frac{z}{v}\right) v^{-1} dv. \quad (5.12)$$

Из формулы (5.10) следует, что контур интегрирования C в выражении (5.12) охватывает только полюсы функции $X(v)v^{-1}$, но не охватывает полюсы функции $H(z/v)$.

Формулы (5.9) и (5.12) называют *комплексной свёрткой* (свёрткой Z-изображений). Обращаем внимание на симметрию операции комплексной свёртки относительно свёртываемых функций.

Таким образом, операции умножения двух оригиналов (решётчатых функций) соответствует операция комплексной свёртки их Z-изображений.

ЗАМЕЧАНИЕ Рассматриваемая здесь свертка бесконечных дискретных последовательностей называется *линейной* сверткой; ее не следует путать с *круговой* сверткой *периодических* последовательностей.

5.4. Вопрос №4

Обратное z-преобразование

Соответствие между дискретной последовательностью чисел и ее z-преобразованием является взаимно-однозначным. Формула перехода от z-преобразования к последовательности чисел называется *обратным z-преобразованием* и формально записывается следующим образом:

$$x(k) = \frac{1}{j2\pi} \oint X(z) z^{k-1} dz. \quad (5.13)$$

Интеграл в (5.13) берется по произвольному замкнутому контуру, расположенному в области сходимости функции $X(z)$ и охватывающему все ее полюсы.

Практическое вычисление обратного z-преобразования чаще производится путем разложения функции $X(z)$ на простые дроби. Поясним это на несложном примере. Пусть

$$X(z) = \frac{1}{\frac{1}{2}z^{-2} - \frac{3}{2}z^{-1} + 1}. \quad (5.14)$$

Представим $X(z)$ в виде суммы простых дробей:

$$X(z) = \frac{1}{(1 - z^{-1})\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)} = \frac{2}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}. \quad (5.15)$$

Из сравнения слагаемых (5.15) с таблицей z-преобразований (Табл. 4.1) видно, что первое слагаемое соответствует скачку с амплитудой, равной 2, а второе — дискретной показательной функции -2^{-k} , $k \geq 0$. Итак, искомая последовательность имеет вид

$$x(k) = \begin{cases} 2 - 2^k, & k \geq 0, \\ 0, & k < 0. \end{cases}$$

6. ЛЕКЦИЯ №6

Тема: **Линейные дискретные системы с постоянными параметрами**

- Учебные вопросы:
1. Понятие линейной дискретной системы с постоянными параметрами.
 2. Импульсная характеристика.
 3. Устойчивость дискретных систем.

6.1. Вопрос №1

Понятие линейной дискретной системы с постоянными параметрами

В принципе «дискретная система» и «дискретный фильтр» — это одно и то же, однако понятие «фильтр», сознательно или подсознательно, довольно тесно связывается с системами, которые одни частоты *пропускают*, а другие *задерживают*. Такой подход может создать ложное, ограниченное представление о назначении и возможностях дискретных линейных систем, которые способны выполнять и иные задачи, нежели выделение из сигнала определенной полосы частот. По этой причине в названии данной лекции использован термин «дискретные системы». Однако в тексте слова «фильтр» и «система» будут использоваться как синонимы.

Вообще, дискретный фильтр — это произвольная система обработки дискретного сигнала, обладающая свойствами линейности и стационарности. Под этими свойствами понимается то же, что и в аналоговом случае: *линейность* означает, что выходная реакция на сумму сигналов равна сумме реакций на эти сигналы, поданные на вход по отдельности, а *стационарность* — что задержка входного сигнала приводит лишь к такой же задержке выходного сигнала, не меняя его формы.

Любой фильтр обладает определенной частотной характеристикой. Чтобы она была нетривиальной, то есть чтобы коэффициент передачи фильтра на разных частотах был разным, выходной сигнал фильтра $y(k)$ должен зависеть от *нескольких* отсчетов входного сигнала $x(k)$. Таким образом, дискретный фильтр должен обладать *памятью*.

Чтобы обеспечить линейность и стационарность, производимые фильтром математические операции должны ограничиваться сложением и умножением на константы.

Рассмотрим простейший пример. Пусть выходной сигнал фильтра равен сумме двух последних отсчетов входного сигнала:

$$y(k) = x(k) + x(k-1)$$

Убедимся в том, что эта система по-разному пропускает на выход сигналы разных частот: подадим на вход фильтра серию одинаковых отсчетов (то есть сигнал нулевой частоты):

Вход	Выход
...	...
1	...
1	$1 + 1 = 2$
1	$1 + 1 = 2$
1	$1 + 1 = 2$
...	...

Как видите, уровень постоянного сигнала фильтр увеличил в два раза. Теперь подадим на вход отсчеты, одинаковые по модулю, но с чередующимися знаками (то есть отсчеты гармонического сигнала с частотой Найквиста):

Вход	Выход
...	...
1	...
-1	$-1 + 1 = 0$
1	$1 + (-1) = 0$
-1	$-1 + 1 = 0$
...	...

В отличие от постоянного сигнала, сигнал с частотой Найквиста на выход просто не прошел. Далее попробуем что-нибудь промежуточное, например сигнал с частотой, равной половине частоты Найквиста:

Вход	Выход
...	...
1	...
0	$0 + 1 = 1$
-1	$-1 + 0 = -1$
0	$0 + (-1) = -1$
1	$1 + 0 = 1$
0	$0 + 1 = 1$
-1	$-1 + 0 = -1$
...	...

На выходе в данном случае получаются отсчеты синусоиды, имеющей большую амплитуду и некоторый фазовый сдвиг по сравнению со входным сигналом. Рассмотренный пример представляет собой простейший случай *нерекурсивного* фильтра. Такие фильтры суммируют некоторое число входных отсчетов, умножая их при этом на постоянные весовые коэффициенты.

Теперь заметим, что помимо выходных отсчетов мы можем использовать для вычислений и ранее рассчитанные значения *выходного* сигнала. Попробуем просто суммировать входной отсчет и предыдущий выходной отсчет:

$$y(k) = x(k) + y(k-1)$$

Подаем на вход постоянный сигнал (начальное состояние фильтра считаем нулевым):

Вход	Выход
1	$1 + 0 = 1$
1	$1 + 1 = 2$
1	$1 + 2 = 3$
1	$1 + 3 = 4$
...	...

Так, очевидно, будет продолжаться и далее — выходной сигнал будет линейно нарастать, что рано или поздно приведет к переполнению разрядной сетки вычислительного устройства. Это сразу же демонстрирует нам главную отличительную черту фильтров, использующих при вычислениях предыдущие отсчеты выходного сигнала (их называют *рекурсивными* фильтрами) — из-за наличия обратных связей они могут быть *неустойчивыми*.

Попробуем уменьшить влияние обратной связи, разделив предыдущий отсчет выходного сигнала на 2:

$$y(k) = x(k) + 0,5y(k-1)$$

Снова подаем на вход постоянный сигнал:

Вход	Выход
1	$1 + 0,5 \cdot 0 = 1$
1	$1 + 0,5 \cdot 1 = 1,5$
1	$1 + 0,5 \cdot 1,5 = 1,75$
1	$1 + 0,5 \cdot 1,75 = 1,875$
1	$1 + 0,5 \cdot 1,875 = 1,9375$
...	...

Как видим, ситуация радикально изменилась — теперь выходной сигнал с уменьшающейся скоростью стремится к значению 2. Таким образом, переходный процесс в фильтре является *бесконечным*. Это еще одна отличительная черта рекурсивных фильтров.

Итак, рекурсивные фильтры суммируют при расчетах не только входные, но и некоторое количество предыдущих выходных отсчетов сигнала, умножая их при этом на постоянные весовые коэффициенты.

Разностное уравнение ЦФ

В общем случае дискретный фильтр суммирует (с весовыми коэффициентами) некоторое количество входных отсчетов (включая последний) и некоторое количество предыдущих выходных отсчетов:

$$y(k) = b_0 x(k) + b_1 x(k-1) + \dots + b_m x(k-m) - a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) - \dots - a_n y(k-n), \quad (1) \quad (6.1)$$

где a_j и b_i — вещественные коэффициенты.

Данная формула называется *алгоритмом дискретной фильтрации*. Если по-иному сгруппировать слагаемые, чтобы с одной стороны от знака равенства были только входные отсчеты, а с другой — только выходные, получим форму записи, называемую *разностным уравнением*:

$$y(k) + a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + \dots + a_n y(k-n) = b_0 x(k) + b_1 x(k-1) + \dots + b_m x(k-m). \quad (6.2)$$

Структура разностного уравнения похожа на структуру дифференциального уравнения аналоговой линейной системы, только вместо операции дифференцирования в формуле фигурируют задержки дискретных последовательностей. Как мы увидим далее, этим определяется и общность подходов к описанию аналоговых и дискретных систем. Однако весьма существенным является то, что в дискретной системе не существует каких-либо принципиальных ограничений на соотношение между m и n — количествами входных и выходных отсчетов, используемых при вычислениях.

6.2. Вопрос №2

Импульсная характеристика

В случае линейных систем с постоянными параметрами для анализа прохождения любого сигнала достаточно знать результат прохождения элементарного импульса в виде дельта-функции. Для дискретных систем также можно ввести в рассмотрение единичную импульсную функцию $x_0(k)$.

Выходная реакция на единичный импульс $x_0(k)$ называется *импульсной характеристикой* дискретной системы и обозначается $h(k)$.

Как и в случае линейных систем с постоянными параметрами, знание импульсной характеристики позволяет проанализировать прохождение через дискретную систему любого сигнала. Действительно, прежде всего заметим, что произвольный сигнал $\{x(k)\}$ можно представить в виде линейной комбинации единичных отсчетов:

$$x(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) x_0(k-m).$$

Выходной сигнал, исходя из линейности и стационарности рассматриваемой системы, должен представлять собой линейную комбинацию импульсных характеристик:

$$y(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(k-m). \quad (6.3)$$

Выражение (3) называется *дискретной сверткой* (точнее, дискретной *линейной* сверткой — ее не следует путать с *круговой* сверткой, которая рассматривается при обсуждении свойств дискретного преобразования Фурье. Для физически реализуемой системы $h(k)=0$ при $k<0$, поэтому верхний предел суммирования в формуле (3) можно заменить на k .

$$y(k) = \sum_{m=-\infty}^k x(m)h(k-m).$$

Это означает, что система при вычислении очередного отсчета может оперировать только прошлыми значениями входного сигнала и еще ничего не знает о будущих.

Пример вычисления дискретной свертки, подробно иллюстрирующий выполняемые при этом математические операции, приведен на рис. 1.

Как для любой дискретной системы для дискретного фильтра справедливо выражение *дискретной свертки*

$$y_n = \sum_{k=0}^{\infty} h_k x_{n-k},$$

где y_n — отсчеты выходного сигнала, x_{n-k} — отсчеты входного сигнала, задержанные на k периодов дискретизации, h_k — отсчеты импульсной характеристики.

Импульсной характеристикой дискретной системы называется реакция системы на сигнал типа δ -импульс

$$\delta_n = \{1, 0, 0, \dots, 0, \dots\}$$

при нулевых начальных условиях.

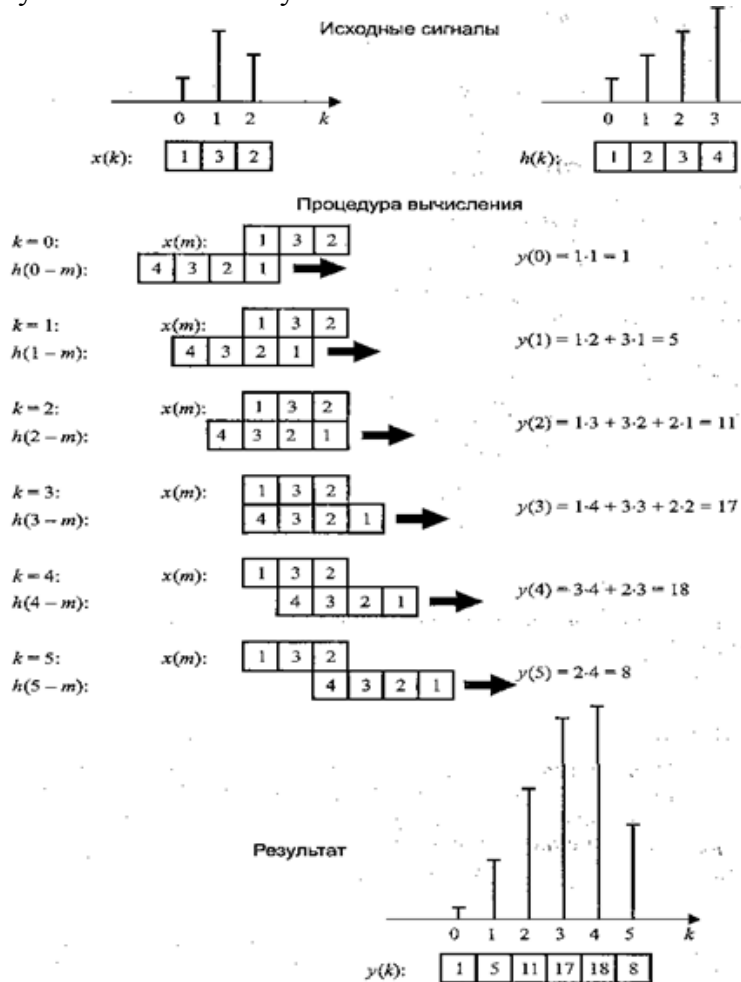


Рис. 6.1 Вычисление дискретной свертки

Отсчеты импульсной последовательности можно получить, подавая на вход дискретной системы δ -импульс (рисунок 1).

6.3. Вопрос №3

Устойчивость дискретных систем

При отсутствии входного сигнала в дискретной системе могут существовать *свободные колебания*. Их вид зависит от начальных условий, то есть значений, хранящихся в элементах памяти системы в момент отключения входного сигнала. Система называется *устойчивой*, если при любых начальных условиях свободные колебания являются затухающими, то есть если при $x(k) \rightarrow 0$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y(k) = 0.$$

Любой сигнал на выходе линейной стационарной системы представляет собой линейную комбинацию ее задержанных во времени импульсных характеристик. Поэтому для затухания свободных колебаний необходимо, чтобы была затухающей импульсная характеристика системы $h(k)$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h(k) = 0.$$

Дискретный фильтр называется устойчивым, если при произвольных начальных условиях реакция y_n на любое ограниченное воздействие x_n также ограничена, т.е. если $\max |x_n| \leq R_x$, то $\max |y_n| \leq R_y$, где $R_x, R_y < \infty$.

Критерием устойчивости дискретного фильтра является абсолютная сходимость ряда отсчетов импульсной характеристики [2]:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |h_k| < \infty \quad (6.4)$$

Действительно, если представить y_n в виде свертки входного сигнала и импульсной характеристики

$$y_n = \sum_{k=0}^{\infty} h_k x_{n-k},$$

то

$$|y_n| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} h_k x_{n-k} \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |h_k| |x_{n-k}| \leq R_x \sum_{k=0}^{\infty} |h_k|$$

откуда следует (6.4).

Существует другой критерий устойчивости дискретного фильтра: все *полюса передаточной функции должны находиться внутри единичного круга z-плоскости* (рисунок 2), т.

$$\text{е. } |z_k^*| < 1. \quad (2) \quad (6.5)$$

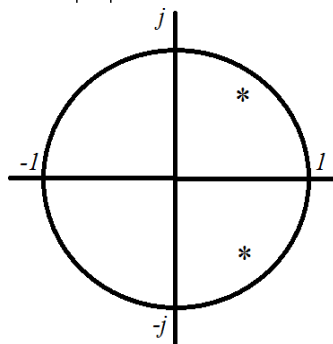


Рисунок 2 – Пояснение критерия устойчивости

Действительно, так как $H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^{-k}$ [2], то можно получить

$$|H(z)| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^{-k} \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |h_k| |z^{-k}| \quad (6.6)$$

Допустим, что $|z^{-1}| \leq 1$, т.е. $|z| \geq 1$. Тогда $|z^{-k}| \leq 1$ и из выражения (6.6) получим

$$|H(z)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |h_k|$$

Для устойчивого фильтра должно выполняться условие (6.4), т. е.

$$|H(z)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |h_k| < \infty.$$

Следовательно, $H(z)$ должна быть конечна во всех точках z -плоскости, где $|z| > 1$.

Очевидно, что в полюсе (при $z = z_k^*$) $H(z) = \infty$. Отсюда следует, что передаточная функция не должна иметь полюсов на единичной окружности и вне ее, т. е. должно выполняться условие (2).

Импульсная характеристика системы в общем случае содержит слагаемые вида

$$A p_i^k k^n,$$

где p_i — полюсы функции передачи системы, n — неотрицательные целые числа, меньшие кратности полюса p_i , A — некая константа.

Такие слагаемые при $k \rightarrow \infty$ затухают, если полюс p_i , по модулю меньше единицы:

$$|p_i| < 1.$$

Теперь мы можем окончательно сформулировать условие устойчивости: *чтобы дискретная система была устойчива, полюсы ее функции передачи должны находиться на комплексной плоскости внутри круга единичного радиуса.*

7. ЛЕКЦИЯ №7

Тема: Цифровые фильтры

- Учебные вопросы:
1. Алгоритм линейной цифровой фильтрации. Разностное уравнение.
 2. Классификация цифровых фильтров

7.1. Вопрос №1

Алгоритм линейной цифровой фильтрации. Разностное уравнение

Линейный аналоговый фильтр представляет собой четырёхполюсник, в котором реализуется линейное преобразование входного сигнала $x(t)$ в выходной сигнал $y(t)$. Математически это преобразование описывается обыкновенным линейным *дифференциальным уравнением* N -го порядка

$$y(t) = \sum_{k=0}^M \alpha_k \frac{d^k}{dt^k} x(t) - \sum_{k=1}^N \beta_k \frac{d^k}{dt^k} y(t), \quad M < N, \quad (1) \quad (7.1)$$

где α_k ($k = \overline{0, M}$) и β_k ($k = \overline{1, N}$) — коэффициенты, являющиеся либо константами, либо функциями времени t ; N — порядок фильтра.

Линейный дискретный фильтр представляет собой дискретный вариант аналогового линейного фильтра, в котором квантованной (дискретизированной) является независимая переменная — время $t = nT$ ($T = 1/f$ — шаг дискретизации). При этом целочисленная переменная n может рассматриваться как «дискретное время», а сигналы $x[n]$ и $y[n]$ как функции «дискретного времени» (так называемые решётчатые функции).

Математически работа линейного дискретного фильтра описывается линейным *разностным уравнением* вида

$$y_n = \sum_{i=0}^M b_i x_{n-i} - \sum_{i=1}^N a_i y_{n-i}, \quad (2) \quad (7.2)$$

где a_i , b_i — коэффициенты фильтра; x_{n-i} , y_{n-i} — отсчеты входного и выходного сигналов, задержанные на i периодов дискретизации.

Алгоритм фильтрации (7.2) может быть реализован средствами аналоговой либо цифровой техники. В первом случае отсчеты входных $x[n]$ и выходных $y[n]$ сигналов по уровню не квантуются и могут принимать любые значения в диапазоне их изменения (т.е. имеют мощность континуума). Во втором случае отсчеты сигналов $x[n]$ и $y[n]$ подвергаются квантованию по уровню, в связи с чем они могут принимать только «разрешённые» значения, определяемые разрядностью цифровых устройств. Кроме того, квантованные отсчеты сигналов кодируются, поэтому арифметические операции, выполняемые в выражении (7.2), осуществляются не над самими сигналами, а над их двоичными кодами.

Из-за квантования по уровню сигналов $x[n]$ и $y[n]$, а также коэффициентов a_i ($i = \overline{0, M}$) и b_i ($i = \overline{1, N}$) равенство в алгоритме (7.2) не может быть точным и выполняется лишь приближённо. Таким образом, линейный ЦФ представляет собой цифровое устройство, приближённо реализующее алгоритм фильтрации (7.2).

Операция квантования сигналов по уровню является сугубо нелинейной, поэтому ЦФ, реализующие линейный алгоритм (7.2), строго говоря, представляют собой нелинейные

устройства, к которым не применимы математические методы анализа и синтеза линейных систем. Однако в большинстве случаев число разрядов цифровых кодов для представления сигналов в ЦФ выбирается достаточно большим, что позволяет считать сигналы приближённо дискретными, а цифровые фильтры, реализующие алгоритм (7.2), — приближённо дискретными линейными фильтрами. Это даёт возможность использовать весьма развитый аппарат теории дискретных линейных систем для анализа и синтеза цифровых фильтров.

Эффекты квантования, связанные с конечной разрядностью представления сигналов и коэффициентов ЦФ, могут быть учтены специальными приёмами, при этом результаты фильтрации удастся скорректировать с учётом эффектов конечной разрядности (квантования). Такой подход оказался плодотворным и применяется при проектировании ЦФ.

7.2. Вопрос №2

Классификация цифровых фильтров

Классификация ЦФ может быть проведена в различных *аспектах*. В каждом из них следует выделять определённые *уровни* (классификационные признаки). Уровни иногда разделяются на *подуровни*, на которых ЦФ различаются по *характерным свойствам*.

Можно назвать следующие аспекты классификации ЦФ: функциональный, алгоритмический, реализационный и др.

При этом *любой* ЦФ будет «располагаться» на одном из уровней *любого* аспекта.

Рассмотрим классификацию ЦФ в *алгоритмическом* аспекте. При этом уровни определяются особенностями обрабатываемых сигналов, структурой алгоритма фильтрации, а также «внутренними» свойствами алгоритма [1, 3].

В радиолокации, радионавигации, гидроакустике и других областях техники применяются как одномерные, так и многомерные сигналы. Первые являются функциями одного аргумента (чаще всего времени), а вторые — функциями нескольких аргументов (либо пространственных координат, либо пространственных координат и времени).

По этому признаку ЦФ разделяются на *одномерные* и *многомерные*.

Среди многомерных ЦФ наибольшее практическое значение имеют двумерные фильтры [8, 12].

Информационные сигналы (одномерные и многомерные) подразделяются на скалярные и векторные. Примерами скалярных сигналов являются одномерный дискретный «временной» процесс $x[n]$ и скалярное поле в S -мерном пространстве $x[\mathbf{n}] \equiv x[n_1, n_2, \dots, n_S]$. Примерами векторных сигналов могут служить одномерный R -координатный вектор и S -мерное R -координатное векторное поле:

$$\mathbf{x}[n] = \begin{pmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \\ \dots \\ x_R[n] \end{pmatrix}; \quad (2.3) \quad (7.3)$$

$$\mathbf{x}[\mathbf{n}] = \begin{pmatrix} x_1[\mathbf{n}] \\ x_2[\mathbf{n}] \\ \dots \\ x_R[\mathbf{n}] \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x_1[n_1, n_2, \dots, n_S] \\ x_2[n_1, n_2, \dots, n_S] \\ \dots \\ x_R[n_1, n_2, \dots, n_S] \end{pmatrix}. \quad (2.4) \quad (7.4)$$

По этому признаку ЦФ можно разделить на *скалярные* и *векторные*.

Кроме того, скалярные сигналы $x[n]$ и $x[\mathbf{n}]$, а также входящие в (7.3) и (7.4) компоненты векторных сигналов $\mathbf{x}[n]$ и $\mathbf{x}[\mathbf{n}]$ могут быть вещественными либо комплексными. По этому признаку ЦФ можно разделить на *вещественные* и *комплексные*.

Названные выше одномерные и многомерные, скалярные и векторные, вещественные и комплексные ЦФ по типу алгоритма обработки сигналов подразделяются на стационарные и нестационарные, рекурсивные и нерекурсивные, линейные и нелинейные.

В самом общем виде алгоритм работы одномерного векторного ЦФ можно записать следующим образом

$$\mathbf{y}[n] = \mathfrak{R}(\mathbf{x}[n], \mathbf{x}[n-1], \dots, \mathbf{x}[n-M], \mathbf{y}[n-1], \dots, \mathbf{y}[n-N], \mathbf{n}), \quad (2.5) \quad (7.5)$$

где $\mathfrak{R}(\dots)$ — некоторая векторная функция многих переменных.

Аналогично может быть представлен алгоритм работы многомерного векторного ЦФ:

$$\mathbf{y}[\mathbf{n}] = \mathfrak{R}(\mathbf{x}[\mathbf{n}], \mathbf{x}[\mathbf{n}-\boldsymbol{\mu}_1], \dots, \mathbf{x}[\mathbf{n}-\boldsymbol{\mu}_M], \mathbf{y}[\mathbf{n}-\mathbf{v}_1], \dots, \mathbf{y}[\mathbf{n}-\mathbf{v}_N], \mathbf{n}), \quad (2.6) \quad (7.6)$$

где $\boldsymbol{\mu}_k = (\mu_{k1}, \mu_{k2}, \dots, \mu_{kS})$ ($k = \overline{1, M}$) и $\mathbf{v}_k = (v_{k1}, v_{k2}, \dots, v_{kS})$ ($k = \overline{1, N}$)

ненулевые векторы-строки «запаздывания», компоненты которых являются натуральными числами. Совокупности векторов $\boldsymbol{\mu}_k$ ($k = \overline{1, M}$) и \mathbf{v}_k ($k = \overline{1, N}$) образуют матрицы

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \\ \dots \\ \boldsymbol{\mu}_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \dots & \mu_{1S} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \dots & \mu_{2S} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{M1} & \mu_{M2} & \dots & \mu_{MS} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \dots \\ \mathbf{v}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1S} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2S} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{N1} & v_{N2} & \dots & v_{NS} \end{pmatrix}.$$

Количество строк в этих матрицах определяет число запаздывающих сигналов $\mathbf{x}[\mathbf{n}-\boldsymbol{\mu}_k]$ ($k = \overline{1, M}$) и $\mathbf{y}[\mathbf{n}-\mathbf{v}_k]$ ($k = \overline{1, N}$), используемых в алгоритме (2.6) для вычисления очередного отсчёта $\mathbf{y}[\mathbf{n}]$.

Алгоритм одномерной фильтрации (7.5) является частным случаем алгоритма многомерной фильтрации (7.6).

Если функция $\mathfrak{R}(\dots)$ зависит явно от «дискретного времени» \mathbf{n} , то ЦФ является *нестационарным*. Если же функция $\mathfrak{R}(\dots)$ не зависит явно от переменной \mathbf{n} , т.е.

$$\mathbf{y}[\mathbf{n}] = \mathfrak{R}(\mathbf{x}[\mathbf{n}], \mathbf{x}[\mathbf{n}-\boldsymbol{\mu}_1], \dots, \mathbf{x}[\mathbf{n}-\boldsymbol{\mu}_M], \mathbf{y}[\mathbf{n}-\mathbf{v}_1], \dots, \mathbf{y}[\mathbf{n}-\mathbf{v}_N]), \quad (2.7) \quad (7.7)$$

$$\mathbf{x}[\mathbf{n}-\boldsymbol{\mu}_k] \quad (k = \overline{1, M})$$

то ЦФ будет *стационарным* (инвариантным к временному или пространственному сдвигу сигнала). В случае многомерных фильтров для обозначения свойства инвариантности по отношению к сдвигу вдоль пространственных координат используется термин «однородность». Стационарные фильтры называют фильтрами с постоянными параметрами, а нестационарные — фильтрами с переменными параметрами.

Функция $\mathfrak{R}(\dots)$ в выражениях (7.6) и (7.7) может зависеть или не зависеть от отсчётов выходного сигнала $\mathbf{y}[\mathbf{n}-\mathbf{v}_k]$ ($k = \overline{1, N}$). По этому признаку ЦФ подразделяются на рекурсивные и нерекурсивные.

Алгоритм работы нерекурсивного многомерного векторного ЦФ по аналогии с (7.6) можно записать в виде

$$\mathbf{y}[\mathbf{n}] = \mathfrak{R}(\mathbf{x}[\mathbf{n}], \mathbf{x}[\mathbf{n}-\boldsymbol{\mu}_1], \dots, \mathbf{x}[\mathbf{n}-\boldsymbol{\mu}_M], \mathbf{n}). \quad (2.8) \quad (7.8)$$

В рекурсивных алгоритмах фильтрации процесс вычисления выходного сигнала в n -й момент $\mathbf{y}[\mathbf{n}]$ осуществляется с использованием предыдущих отсчётов выходного сигнала $\mathbf{y}[\mathbf{n}-\mathbf{v}_k]$ ($k = \overline{1, N}$). Особенно наглядно это видно в алгоритме одномерной рекурсивной фильтрации (2.5), в котором вычисление выходного сигнала в n -й момент времени производится с использованием N предыдущих отсчётов выходного сигнала $\mathbf{y}[n-k]$ ($k = \overline{1, N}$), где N — глубина рекурсии. Таким образом, в рекурсивных ЦФ имеет место обратная связь.

В нерекурсивных же алгоритмах (7.8) вычисление отсчёта $y[n]$ производится только по совокупности отсчётов входного сигнала $x[n - \mu_k]$ ($k=1, M$), т.е. обратная связь отсутствует.

Отсчёты входного $x[n - \mu_k]$ ($k=1, M$) и выходного $y[n - \nu_k]$ ($k=1, N$) сигналов ЦФ могут входить в алгоритмы фильтрации (7.5) — (7.8) линейным или нелинейным образом. Иными словами, функция $\mathcal{R}(\dots)$ может быть линейной или нелинейной. В зависимости от этого ЦФ подразделяются на линейные и нелинейные.

В самом общем виде алгоритм (7.6) каузальной линейной рекурсивной цифровой фильтрации описывается линейным векторно-матричным уравнением в конечных разностях:

$$y[n] = \sum_{k=0}^M a_k[n] x[n - \mu_k] - \sum_{k=1}^N b_k[n] y[n - \nu_k], \quad (2.9) \quad (7.9)$$

где коэффициенты алгоритма $a_k[n]$ ($k=0, M$) и $b_k[n]$ ($k=1, N$) являются квадратными матрицами размера $R \times R$ (R — количество компонент в векторах $x[n]$ и $y[n]$).

Из общего алгоритма многомерной векторной рекурсивной линейной фильтрации (2.9) можно получить следующие частные случаи:

- если в уравнении (7.9) векторный аргумент n имеет только одну-единственную компоненту n , то фильтр будет одномерным, иначе — многомерным;
- если в уравнении (7.9) векторы $x[n]$, $y[n]$ и матрицы коэффициентов $a_k[n]$ ($k=0, M$), $b_k[n]$ ($k=1, N$) имеют только по одной компоненте, то ЦФ будет скалярным, иначе — векторным;
- если в уравнении (7.9) сигналы $x[n]$, $y[n]$ и матрицы коэффициентов фильтра $a_k[n]$ ($k=0, M$), $b_k[n]$ ($k=1, N$) являются вещественными, то ЦФ будет вещественным, иначе — комплексным;
- если в уравнении (7.9) все матрицы коэффициентов ЦФ $a_k[n]$ ($k=0, M$) и $b_k[n]$ ($k=1, N$) не зависят от «дискретного времени» n , т.е. элементы этих матриц являются константами, то ЦФ будет стационарным, иначе — нестационарным;
- если в уравнении (7.9) отсутствует вторая сумма, т.е. $b_k[n]$ ($k=1, N$), то ЦФ будет нерекурсивным, иначе — рекурсивным.

Уравнение в конечных разностях (2.2) представляет собой частный случай уравнения (2.9) и описывает одномерный скалярный стационарный рекурсивный линейный ЦФ (вещественный или комплексный).

Для линейных ЦФ справедлив принцип суперпозиции (наложения), т.е. принцип независимого действия причин, вызывающих то или иное следствие.

Для нелинейных ЦФ принцип суперпозиции не справедлив.

Дальнейшую классификацию ЦФ можно провести по «внутренним» свойствам алгоритма фильтрации. Дело в том, что ЦФ при одинаковых алгоритмах фильтрации могут иметь различные сочетания параметров, этим объясняется качественное различие свойств и характеристик таких фильтров. Например, одномерные скалярные вещественные стационарные линейные ЦФ, описываемые алгоритмом фильтрации (7.2), по расположению нулей передаточной функции на Z -плоскости можно разделить на две группы: минимально-фазовые и неминимально-фазовые. Различие свойств ЦФ этих групп определяется расположением нулей передаточной функции на Z -плоскости, что связано с коэффициентами a_k ($k=0, M$) алгоритма (7.2). В классе одномерных скалярных вещественных стационарных нерекурсивных линейных неминимально-фазовых ЦФ существуют фильтры с линейными фазочастотными характеристиками и фильтры с нелинейными фазочастотными характеристиками.

Нелинейные ЦФ можно классифицировать по типу нелинейности функции $\mathcal{R}(\dots)$, например фильтры со степенной характеристикой, фильтры с логарифмической характеристикой и т.д. На практике нелинейные фильтры обычно реализуют в виде сочетания нелинейных безынерционных и линейных инерционных динамических звеньев.

Алгоритм работы нелинейного безынерционного звена в общем случае можно описать формулой

$$y[n] = \Re(x[n], n). \quad (7.10)$$

Как частный случай отсюда следует алгоритм работы стационарного нелинейного безынерционного звена

$$y[n] = \Re(x[n]). \quad (7.11)$$

Рассмотренная классификация ЦФ, базирующаяся на временном подходе к цифровой обработке сигналов [1, 3], представлена на рис.7.1.

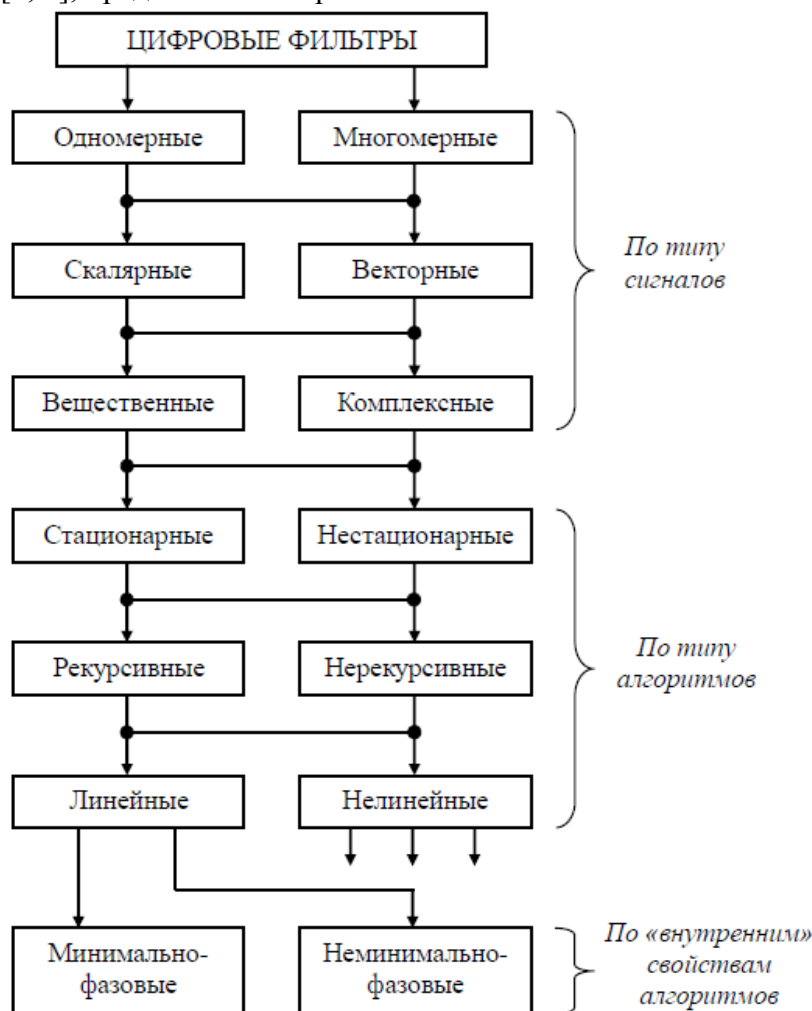


Рис. 7.1. Классификация цифровых фильтров

Отметим некоторые особенности классификации ЦФ в алгоритмическом аспекте. Первый уровень (тип сигналов) имеет приоритет, поскольку от типа обрабатываемых сигналов зависит тип алгоритмов (второй уровень). Подуровни первого и второго уровней не являются иерархическими, поэтому, в принципе, их можно менять местами. Однако на третьем уровне имеет место иерархия подуровней: фильтры с линейными ФЧХ существуют *только* в классе нерекурсивных линейных неминимально-фазовых ЦФ (эти подуровни нельзя поменять местами).

Принятое на рис. 7.1 расположение подуровней является наиболее естественным. Любая классификация с иерархией уровней представляется в виде «древовидной структуры». Отсутствие же иерархии подуровней на первом и втором уровнях классификации ЦФ в алгоритмическом аспекте позволило «ветвящееся дерево» свернуть в «линейку». Такое представление менее громоздко, более наглядно и обозримо. Из него видно, какие типы ЦФ являются менее изученными.

Классификация ЦФ в других аспектах автором детально не прорабатывалась. Однако некоторые особенности классификации ЦФ в функциональном и реализационном аспектах следует отметить.

При классификации ЦФ в *функциональном* аспекте можно обозначить следующие уровни:

- робастность (робастные и неробастные ЦФ) с выделением подуровней:
- для *робастных* ЦФ — адаптивные и неадаптивные; адаптивные ЦФ, в свою очередь, различаются стратегией адаптации; для *неробастных* ЦФ — оптимальные для заданного вида фильтруемого процесса и неоптимальные;
- количество частот дискретизации (односкоростные и многоскоростные) с выделением подуровня только для многоскоростных ЦФ — *вид* преобразования частоты дискретизации (интерполяция, децимация, произвольное преобразование);
- диапазон фильтруемых частот (ФНЧ, ФВЧ, полосовые, режекторные, многополосные, гребенчатые ЦФ) с выделением подуровня — *тип* АЧХ (гладкие и с пульсациями).

Из рассмотренного перечня просматривается «древовидная структура» классификации ЦФ, которая не может быть свёрнута в «линейку».

При классификации ЦФ в *реализационном* аспекте обозначим следующие уровни:

- подход к реализации (временной и частотный, т.е. на основе БПФ);
- способ квантования (равномерный и неравномерный).

Каждый из них можно разделить на подуровни, причём для разных типов ЦФ на этих уровнях подуровни будут различными, что обуславливает «древовидную структуру» классификации ЦФ, которая не может быть свёрнута в «линейку».

8. ЛЕКЦИЯ №8

Тема: Цифровые фильтры Передаточные характеристики рекурсивных и нерекурсивных фильтров

- Учебные вопросы:
1. Определение передаточной функции. Связь между разностным уравнением и передаточной функцией ЦФ.
 2. Передаточные функции фильтров первого и второго порядков.
 3. Нули и полюсы передаточной функции

8.1. Вопрос №1

Определение передаточной функции. Связь между разностным уравнением и передаточной функцией ЦФ

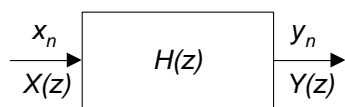


Рис. 1. Передаточная функция

Передаточной функцией $H(z)$ фильтра (Рис. 1.) называется отношение z -преобразования выходной последовательности к z -преобразованию входной последовательности при нулевых начальных условиях:

$$H(z) = \frac{Z\{y_n\}}{Z\{x_n\}} = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (8.11)$$

Передаточную функцию можно получить, применив z -преобразование к разностному уравнению. При этом целесообразно использовать свойства z -преобразования.

По определению z -преобразование последовательности x_n определяется как

$$Z(x_n) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k}, \text{ тогда } z\text{-преобразование } \delta\text{-импульса - } Z(\delta_n) = 1.$$

Из (8.11) следует, что z -преобразование импульсной характеристики определяется как

$$Z\{h_n\} = H(z)Z\{\delta_n\} = H(z) \cdot 1 = H(z), \quad (8.22)$$

т.е. передаточная функция является z -преобразованием импульсной характеристики (см таблицу 1).

Найдём выражение для передаточной функции одномерного скалярного стационарного рекурсивного линейного ЦФ. Для этого возьмём Z -преобразование от обеих частей линейного разностного уравнения:

$$Z\{y[n]\} = Z\left\{\sum_{k=0}^M a_k x[n-k] - \sum_{k=1}^N b_k y[n-k]\right\},$$

полагая входной сигнал $x[n]=0$ при $n<0$, а начальные условия в ЦФ нулевыми:

$y[-n]=0$ ($n=\overline{1, N}$). Воспользуемся теоремой линейности Z -преобразования и теоремой запаздывания. В результате получим

$$Y(z) = \sum_{k=0}^M a_k z^{-k} X(z) - \sum_{k=1}^N b_k z^{-k} Y(z) \quad . (3.6) (8.33)$$

Отсюда, используя определение передаточной функции (3.3), находим

$$H(z) = \frac{A(z^{-1})}{1 + B(z^{-1})} = \frac{\sum_{k=0}^M a_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}}, \quad (8.43.7)$$

где $A(z^{-1})$ и $B(z^{-1})$ — полиномы комплексного аргумента z^{-1} . Коэффициенты полиномов $A(z^{-1})$ a_k ($k = \overline{0, M}$) и $B(z^{-1})$ b_k ($k = \overline{1, N}$) являются вещественными числами для вещественного скалярного стационарного рекурсивного линейного ЦФ и комплексными числами для комплексного ЦФ.

Таким образом, передаточная функция $H(z)$ одномерного скалярного стационарного рекурсивного линейного ЦФ является дробно-рациональной функцией комплексного аргумента z^{-1} , а параметры передаточной функции (3.7) равны коэффициентам a_k ($k = \overline{0, M}$) и b_k ($k = \overline{1, N}$) алгоритма линейной цифровой фильтрации (2.2).

8.2. Вопрос №2

Передаточные функции фильтров 1-го и 2-го порядков

Важную роль в системах обработки сигналов играют рекурсивные фильтры 1-го и 2-го порядков. Рассмотрим передаточные функции этих фильтров.

• **Базовый рекурсивный фильтр 1-го порядка.** Базовым РФ 1-го порядка называют фильтр, описываемый разностным уравнением вида:

$$y_n = x_n - a_1 y_{n-1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8.54)$$

Применив z -преобразование к левой и правой частям уравнения, получим

$$Y(z) = X(z) - a_1 z^{-1} Y(z). \quad (8.65)$$

Следовательно, передаточная функция фильтра имеет вид

$$H(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1}}. \quad (8.76)$$

• **Рекурсивный фильтр 1-го порядка.** Разностное уравнение имеет вид:

$$y_n = b_0 x_n + b_1 x_{n-1} - a_1 y_{n-1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8.87)$$

Применив z -преобразование к левой и правой частям уравнения, получим

$$Y(z) = b_0 X(z) + b_1 z^{-1} X(z) - a_1 z^{-1} Y(z). \quad (8.98)$$

Отсюда

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}. \quad (8.109)$$

• **Базовый рекурсивный фильтр 2-го порядка.** Разностное уравнение и передаточная функция имеют вид:

$$y_n = x_n - a_1 y_{n-1} - a_2 y_{n-2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

$$H(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}. \quad \text{Ё} \quad (8.1111)$$

• **Рекурсивный фильтр 2-го порядка.** Разностное уравнение и передаточная функция имеют вид:

$$y_n = b_0 x_n + b_1 x_{n-1} + b_2 x_{n-2} - a_1 y_{n-1} - a_2 y_{n-2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8.1212)$$

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}. \quad (8.1313)$$

• **Нерекурсивный фильтр 2-го порядка.** Разностное уравнение и передаточная функция имеют вид:

$$y_n = b_0 x_n + b_1 x_{n-1} + b_2 x_{n-2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8.1414)$$

$$H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}. \quad (8.1515)$$

Формальное соотношение между разностным уравнением и передаточной функцией:

• коэффициенты разностного уравнения являются коэффициентами передаточной функции;

• коэффициенты разностного уравнения b_k при x_{n-k} равны коэффициентам числителя передаточной функции при z^{-k} , $k = 0, 1, \dots, N-1$.

• коэффициенты разностного уравнения b_k при x_{n-k} равны коэффициентам знаменателя передаточной функции (с обратным знаком) при z^{-k} , $k = 0, 1, \dots, N-1$.

Пример. Известна передаточная функция рекурсивного фильтра

$$H(z) = \frac{0.3 - 0.3z^{-2}}{1 - 0.8z^{-1} + 0.64z^{-2}}. \quad (8.1616)$$

Разностное уравнение имеет вид:

$$y_n = 0.3x_n - 0.3x_{n-2} + 0.8y_{n-1} - 0.64y_{n-2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8.1717)$$

• В общем случае передаточная функция дискретного фильтра может быть получена путем применения z-преобразования к разностным уравнениям рекурсивных и нерекурсивных фильтров. Рекурсивный фильтр:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N-1} a_k z^{-k}} \quad (8.1818)$$

Нерекурсивный фильтр:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k z^{-k} \quad (8.1919)$$

Таблица 1

Фильтр	Передаточная функция	Импульсная характеристика
Базовый РФ 1-го порядка	$\frac{1}{1 + a_1 z^{-1}}$	$h_n = (-a_1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$
РФ 1-го порядка	$\frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}$	$h_n = h_{0,n} + h_{1,n},$ $h_{0,n} = b_0 (-a_1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$ $h_{1,n} = b_1 (-a_1)^{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$
Базовый РФ 2-го порядка	$\frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}},$ $a_1 = -2r^* \cos \varphi^*, \quad a_2 = (r^*)^2$	$h_n = (r^*)^n \frac{\sin[(n+1)\varphi^*]}{\sin \varphi^*}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$
РФ 2-го порядка	$\frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}},$ $a_1 = -2r^* \cos \varphi^*, \quad a_2 = (r^*)^2$	$h_n = h_{0,n} + h_{1,n} + h_{2,n},$ $h_{0,n} = b_0 (r^*)^n \frac{\sin[(n+1)\varphi^*]}{\sin \varphi^*}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$ $h_{1,n} = b_1 (r^*)^{n-1} \frac{\sin[n\varphi^*]}{\sin \varphi^*}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$ $h_{2,n} = b_2 (r^*)^{n-2} \frac{\sin[(n-1)\varphi^*]}{\sin \varphi^*}, \quad n = 2, 3, 4, \dots$
НРФ	$\sum_{n=0}^{N-1} b_n z^{-n}$	$h_n = \{b_0, b_1, b_2, \dots, b_{N-1}\}$

8.3. Вопрос №3

Нули и полюсы передаточной функции

При анализе дискретных фильтров имеет значение определение положения полюсов и нулей передаточной функции в z -плоскости.

Полюс – это корень полинома в знаменателе, а нуль – корень полинома в числителе передаточной функции. Если полином имеет вещественные коэффициенты, то его корни могут быть вещественными и/или комплексно-сопряженными.

При определении значений нулей и полюсов в z -плоскости целесообразно преобразовать передаточную функцию к виду без отрицательных степеней z .

Полином второй степени $z^2 + a_1 z + a_2$ имеет либо 2 вещественных корня при $\sqrt{a_1^2 - 4a_2} \geq 0$

$$z_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$$

либо 2 комплексно-сопряженных корня при $\sqrt{a_1^2 - 4a_2} < 0$

$$z_{1,2} = re^{\pm j\varphi}$$

где $r = \sqrt{a_2}$, $\varphi = \arccos(a_1 / 2r)$.

Действительно, если разложить полином на простые множители, то получится

$$\begin{aligned} z^2 + a_1 z + a_2 &= (z - z_1)(z - z_2) = (z - re^{j\varphi})(z - re^{-j\varphi}) = \\ &= z^2 - 2r \cos \varphi z + r^2 \end{aligned}$$

Базовый рекурсивный фильтр 1-го порядка. Преобразуем к виду, без отрицательных степеней z $H(z) = z / (z + a_1)$. Передаточная функция имеет один нуль в точке $z_1^0 = 0$ и один полюс в точке $z_1^* = -a_1$. На рис. 2 изображены карты нулей и полюсов фильтра в z -плоскости при $a_1 < 0$ и $a_1 > 0$.

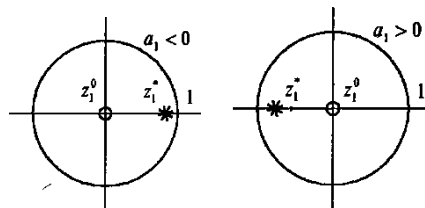


Рисунок 2 – Карты нулей и полюсов базового РФ 1-го порядка

Рекурсивный фильтр 1-го порядка. Для определения нулей и полюсов преобразуем передаточную функцию рекурсивного фильтра 1-го порядка к виду, без отрицательных степеней z

$$H(z) = b_0 \frac{z + b_1/b_0}{z + a_1}$$

Передаточная функция $H(z)$ имеет один нуль в точке $z_1^0 = -b_1/b_0$ и один полюс в точке $z_1^* = -a_1$.

На рис. 3 изображена карта нулей и полюсов фильтра при $b_0 = 0.2$, $b_1 = -0.2$, $a_1 = 0.8$.

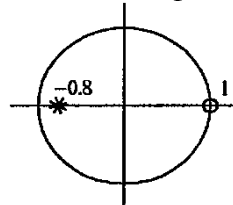


Рисунок 3 – Карта нулей и полюсов РФ 1-го порядка

Базовый рекурсивный фильтр 2-го порядка. Рассмотрим случай комплексно-сопряженных полюсов. Передаточная функция

$$H(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 + a_1 z + a_2}$$

имеет два нуля в точке $z_{1,2}^0 = 0$ и два полюса $z_{1,2}^* = r^* e^{\pm j\varphi^*}$, где $r^* = \sqrt{a_2}$, $\varphi^* = \arccos(a_1/2r^*)$.

На рисунке 4 изображена карта нулей и полюсов фильтра в z-плоскости при $a_1 = -0.8$, $a_2 = 0.64$. При этом $r^* = \sqrt{0.64} = 0.8$, $\varphi^* = \arccos(0.8/2 \cdot 0.8) = \pi/3$.

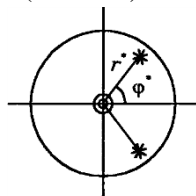


Рисунок 4 – Карта нулей и полюсов базового РФ 2-го порядка

Рекурсивный фильтр 2-го порядка. Рассмотрим случай комплексно-сопряженных полюсов. Передаточная функция

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

имеет два полюса $z_{1,2}^* = r^* e^{\pm j\varphi^*}$, $r^* = \sqrt{a_2}$, $\varphi^* = \arccos(a_1/2r^*)$.

Два вещественных нуля z_1^0 и z_2^0 определяются выражением

$$z_{1,2}^0 = -\frac{b_1}{2b_0} \pm \sqrt{\frac{b_1^2}{4b_0^2} - \frac{b_2}{b_0}}.$$

Для комплексно-сопряженных нулей выражения имеют вид

$$z_{1,2}^0 = r^0 e^{\pm j\varphi^0},$$

где $r^0 = \sqrt{b_2/b_0}$, $\varphi^0 = \arccos(-b_1/2\sqrt{b_0 b_1})$.

На рисунке 5 изображена карта нулей и полюсов фильтра в z-плоскости для двух случаев.

а) $b_0 = 0.2$, $b_1 = 0$, $b_2 = -0.2$, $a_1 = 0.9$, $a_2 = 0.81$ (вещественные нули).

В этом случае $z_1^0 = 1$, $z_2^0 = -1$, $z_{1,2}^* = r^* e^{\pm j\varphi^*}$, $r^* = 0.9$, $\varphi^* = 2\pi/3$.

б) $b_0 = b_1 = b_2 = 0.2$, $a_1 = -0.6$, $a_2 = 0.36$ (комплексно-сопряженные нули).

В этом случае $z_{1,2}^0 = 1 \cdot e^{\pm j\varphi^0}$, $\varphi^0 = 2\pi/3$, $z_{1,2}^* = r^* e^{\pm j\varphi^*}$, $r^* = 0.6$, $\varphi^* = \pi/3$.

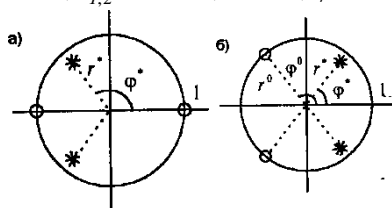


Рисунок 5 – Карты нулей и полюсов РФ 2-го порядка

9. ЛЕКЦИЯ №9

Тема: Частотные характеристики дискретных фильтров

- Учебные вопросы:
1. Определение частотной характеристики ЦФ, АЧХ и ФЧХ.
 2. Свойства частотных характеристик. Нормированные фильтры.
 3. Частотные характеристики ЦФ 1-го и 2-го порядков.

9.1. Вопрос №1

Определение частотной характеристики ЦФ, АЧХ и ФЧХ

Определение частотной характеристики ЦФ

Частотной характеристикой $H(e^{j\hat{\omega}})$ дискретного фильтра называется отношение преобразования Фурье выходной последовательности к преобразованию Фурье входной последовательности при нулевых начальных условиях

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = \frac{F\{y_n\}}{F\{x_n\}} = \frac{Y(e^{j\hat{\omega}})}{X(e^{j\hat{\omega}})} = \frac{Y(e^{j2\pi\hat{f}})}{X(e^{j2\pi\hat{f}})} \quad 9.1 \quad (0.1)$$

Частотная характеристика (ЧХ) представляет собой коэффициент передачи фильтра для каждого значения частоты $\hat{\omega}(\hat{f})$.

Из сравнения (0.1) и $H(z)$ видно, что ЧХ равна передаточной функции фильтра, вычисленной на единичной окружности z-плоскости (при $z = e^{j\hat{\omega}} = e^{j2\pi\hat{f}} = e^{j\varphi}$):

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = H(z)|_{z=e^{j\hat{\omega}}} \quad 9.2 \quad (0.2)$$

Можно установить связь между значениями нормированной частоты \hat{f} и соответствующим углом φ в z-плоскости. Поскольку

$$e^{j\hat{\omega}} = e^{j2\pi\hat{f}} = \cos 2\pi\hat{f} + j \sin 2\pi\hat{f} = \cos \hat{\omega} + j \sin \hat{\omega} = \cos \varphi + j \sin \varphi \quad 9.3 \quad (0.3)$$

то

$$\hat{f} = \varphi / 2\pi = \hat{\omega} / 2\pi \quad 9.4 \quad (0.4)$$

На рис. 1.25 показана связь точек единичной окружности и частот \hat{f} :

- Точке $z = 1 = \cos 0 + j \sin 0$ соответствует $\hat{f} = 0$, $\hat{\omega} = 2\pi \cdot 0$;
- точкам $z = \pm j = \cos\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) + j \sin\left(\pm \frac{\pi}{2}\right)$ соответствуют $\hat{f} = \pm 0.25$, $\hat{\omega} = \pm \frac{\pi}{2}$;
- точке $z = -1 = \cos(\pm\pi) + j \sin(\pm\pi)$ соответствуют $\hat{f} = \pm 0.5$, $\hat{\omega} = \pm\pi$ (рис. 7).

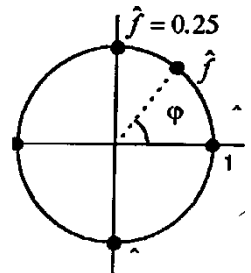


Рис. 7. Связь точек единичной окружности и частот \hat{f}

Часто возникает необходимость представить частотную характеристику фильтра или спектральный состав дискретной последовательности не в безразмерных единицах нормированной частоты, а в единицах частоты, связанной с периодом дискретизации T_d . В этом

случае пользуются соотношением для нормализованной частоты $\hat{\omega} = 2\pi\hat{f} = 2\pi\frac{f}{f_d} =$
 $= 2\pi f T_d = \omega T_d$, с его помощью $\omega = \frac{\hat{\omega}}{T_d}$ или $f = \frac{\hat{f}}{T_d}$. Например, при $T_d = 1\text{msec} = 0.001\text{sec}$ ча-
 стотная характеристика периодична с частотой дискретизации $f_d = 1/10^{-3} = 1000\text{Hz}$, а
 $\omega = \frac{\hat{\omega}}{T_d} = 2 \cdot 10^3 \pi \text{ c}^{-1}$

Используя (0.2), разностные уравнения и (0.1) можно записать общие формулы для частотных характеристик цифровых фильтров.

КИХ-фильтр:

$$H(j\hat{\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k z^{-j\hat{\omega}k} \quad 9.5 \quad (0.5)$$

БИХ-фильтр:

$$H(j\hat{\omega}) = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} b_k e^{-j\hat{\omega}k}}{1 + \sum_{k=1}^{N-1} a_k e^{-j\hat{\omega}k}} \quad 9.6 \quad (0.6)$$

Амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики

Частотная характеристика $H(e^{j\hat{\omega}})$ - комплексная функция. Ее можно представить в виде

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = H_{\text{Re}}(e^{j\hat{\omega}}) + jH_{\text{Im}}(e^{j\hat{\omega}}) = A(\hat{\omega})e^{j\varphi(\hat{\omega})}. \quad 9.7 \quad (0.7)$$

Амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) называется функция

$$A(\hat{\omega}) = |H(e^{j\hat{\omega}})| = \sqrt{H_{\text{Re}}^2(e^{j\hat{\omega}}) + H_{\text{Im}}^2(e^{j\hat{\omega}})}. \quad 9.8 \quad (0.8)$$

Фазочастотной характеристикой (ФЧХ) называется функция

$$\varphi(\hat{\omega}) = \arg(H(e^{j\hat{\omega}})) = \arctan \frac{H_{\text{Im}}(e^{j\hat{\omega}})}{H_{\text{Re}}(e^{j\hat{\omega}})}. \quad 9.9 \quad (0.9)$$

АЧХ устанавливает связь между амплитудами, а ФЧХ — между фазами выходного y_n и входного x_n сигналов фильтра. Если

$$x_n = A_{\text{ex}} \cdot \cos(\hat{\omega}n + \varphi_{\text{ex}}) \quad 9.10 \quad (0.10)$$

то в установившемся режиме

$$y_n = A_{\text{bлх}} \cdot \cos(\hat{\omega}n + \varphi_{\text{блх}}) \quad 9.11 \quad (0.11)$$

где

$$A_{\text{блх}} = A_{\text{ex}} \cdot A(\hat{\omega}) \quad 9.12 \quad (0.12)$$

$$\varphi_{\text{блх}} = \varphi_{\text{ex}} + \varphi(\hat{\omega}) \quad 9.13 \quad (0.13)$$

Общие формулы АЧХ КИХ-фильтра и БИХ-фильтра получаются из (1.61) и (1.62):

$$A_{\text{КИХ}}(\hat{\omega}) = \sqrt{\left(\sum_{k=0}^{N-1} b_k \cos(\hat{\omega}k) \right)^2 + \left(\sum_{k=0}^{N-1} b_k \sin(\hat{\omega}k) \right)^2} \quad 9.14 \quad (0.14)$$

$$A_{БИХ}(\hat{\omega}) = \sqrt{\frac{\left(\sum_{k=0}^{N-1} b_k \cos(\hat{\omega}k)\right)^2 + \left(\sum_{k=0}^{N-1} b_k \sin(\hat{\omega}k)\right)^2}{\left(\sum_{k=1}^{N-1} a_k \cos(\hat{\omega}k)\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{N-1} a_k \sin(\hat{\omega}k)\right)^2}} \quad 9.15 \quad (0.15)$$

9.2. Вопрос №2

Свойства частотных характеристик. Нормированные фильтры

Свойства частотных характеристик

Частотную характеристику можно рассматривать как спектр импульсной характеристики. Действительно, из (1.59) и (1.53) следует, что частотная характеристика является преобразованием Фурье импульсной характеристики:

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k e^{-j\hat{\omega}k} \quad 9.16 \quad (0.16)$$

Следовательно, свойства ЧХ фильтра во многом совпадают со свойствами спектра дискретного сигнала. Ниже приведены основные свойства частотных характеристик дискретных фильтров.

Частотная характеристика является *периодической функцией* по частоте, с периодом, равным частоте дискретизации.

АЧХ и *ФЧХ* также являются *периодическими функциями* с тем же периодом.

Для фильтров с вещественными коэффициентами *АЧХ* — *четная* функция, а *ФЧХ* — *нечетная* функция.

Для полного описания частотной характеристики фильтра с вещественными коэффициентами достаточно задать ее в *основной полосе частот* $\hat{\omega} \in [0, \pi]$ или $\hat{f} \in [0, 0.5]$.

Нормированные фильтры

Цифровой фильтр называют *нормированным*, если максимальное значение *АЧХ* равно 1.

Нормировка фильтра достигается путем умножения коэффициентов числителя передаточной функции на нормирующий множитель $q_n = 1/A_{\max}$, где A_{\max} — максимальное значение *АЧХ* на интервале $\hat{\omega} \in [0, \pi]$.

Пример. Рассмотрим БИХ-фильтр 1-го порядка с передаточной функцией

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}$$

Допустим, что при данных коэффициентах наибольшее значение *АЧХ* на интервале $\hat{\omega} \in [0, \pi]$ равно A_{\max} . Нормированный фильтр будет иметь передаточную функцию

$$H_{\text{норм}}(z) = q_n \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}} = \frac{b'_0 + b'_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}$$

где $b'_0 = q_n b_0$, $b'_1 = q_n b_1$, $q_n = 1/A_{\max}$.

9.3. Вопрос №3

Частотные характеристики ЦФ 1-го и 2-го порядков

Частотные характеристики БИХ-фильтра 1-го порядка

Формулы для передаточной функции (ПФ), частотной (ЧХ), амплитудно-частотной (АЧХ) и фазо-частотной (ФЧХ) характеристик БИХ-фильтра 1-го порядка с учетом (0.6), (0.8) и (0.9) имеют вид

$$\text{ПФ} \quad H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}.$$

$$\text{ЧФ} \quad H(j\hat{\omega}) = \frac{b_0 + b_1 e^{-j\hat{\omega}}}{1 + a_1 e^{-j\hat{\omega}}}.$$

$$\text{АЧХ} \quad A(\hat{\omega}) = \sqrt{\frac{(b_0 + b_1 \cos \hat{\omega})^2 + (b_1 \sin \hat{\omega})^2}{(1 + a_1 \cos \hat{\omega})^2 + (a_1 \sin \hat{\omega})^2}} \quad 9.17 \quad (0.17)$$

$$\text{ФЧХ} \quad \varphi(\hat{\omega}) = -\arctan \frac{b_1 \sin \hat{\omega}}{b_0 + b_1 \cos \hat{\omega}} + \arctan \frac{a_1 \sin \hat{\omega}}{1 + a_1 \cos \hat{\omega}} \quad 9.18 \quad (0.18)$$

Вид АЧХ и ФЧХ фильтра можно определить путем расчета на ЭВМ по (0.17) (0.18). Полезно знать, что значения АЧХ легко определяются на границах основной полосы частот (для $\hat{\omega} = 0$ и $\hat{\omega} = \pi$). Из (0.17) получим

$$A(0) = \left| \frac{b_0 + b_1}{1 + a_1} \right|, \quad A(\pi) = \left| \frac{b_0 - b_1}{1 - a_1} \right|.$$

Пример 1.11. Рассмотрим БИХ-фильтр с передаточной функцией

$$H(z) = \frac{0.1 + 0.1z^{-1}}{1 - 0.8z^{-1}}$$

- Фильтр имеет один нуль $z_I^0 = -1$ и один полюс $z_I^* = 0.8$.
- Значения АЧХ на границах основной полосы частот $A(0) = 1$, $A(\pi) = 0$.
- Графики АЧХ и ФЧХ приведены на рис. 8. Фильтр относится к классу избирательных фильтров нижних частот (ФНЧ).

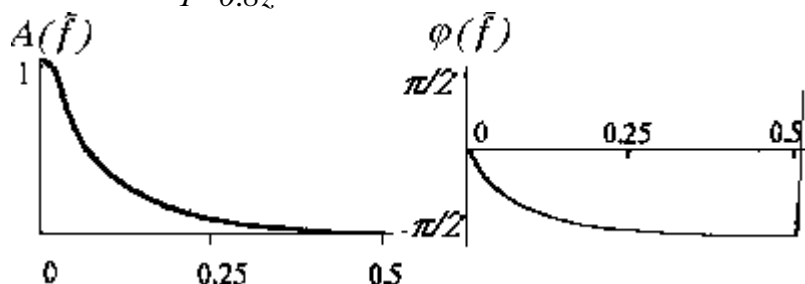


Рис. 8 АЧХ и ФЧХ БИХ-фильтра 1-го порядка ($a_1 < 0$)

Пример 1.12. Рассмотрим БИХ-фильтр с передаточной функцией

$$H(z) = \frac{0.05 - 0.05z^{-1}}{1 + 0.9z^{-1}}$$

- Фильтр имеет один нуль $z_I^0 = 1$ и один полюс $z_I^* = -0.9$.
- Значения АЧХ на границах основной полосы частот $A(0) = 0$, $A(\pi) = 1$.
- Графики АЧХ и ФЧХ, приведены на рис. 9. Фильтр относится к классу избирательных фильтров верхних частот (ФВЧ).

Повторите пример 1.11 (при $a_1 = -0.5$, $b_1 = -0.5$) и пример 1.12 (при $a_1 = 0.5$ и $b_1 = 0.8$). При этом следует предварительно выполнить нормировку фильтров (см. 1.12.5). Расчет АЧХ можно выполнить с помощью любых, имеющихся в распоряжении, средств (даже на калькуляторе). Цель расчета — построение графиков АЧХ и качественная оценка влияния величины коэффициента a_1

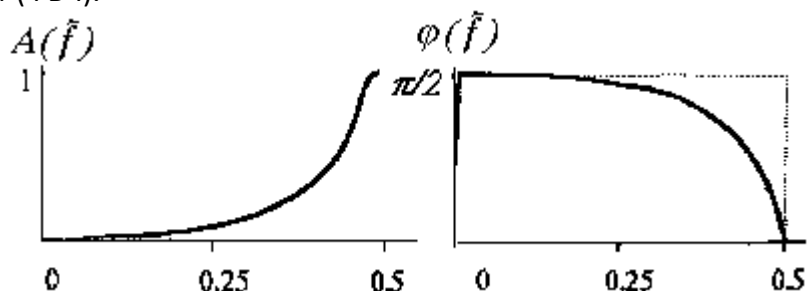


Рис. 9 АЧХ и ФЧХ БИХ-фильтра 1-го порядка ($a_1 > 0$)

(положения полюса z_1^* в z -плоскости) на вид АЧХ. Полезно для каждого случая изображать карту нулей и полюсов (см. 1.8).

Особенности частотных характеристик избирательных БИХ-фильтров 1-го порядка.

- Избирательный БИХ-фильтр 1-го порядка является либо ФНЧ (при $a_1 < 0$), либо ФВЧ (при $a_1 > 0$).

- ФЧХ фильтра — нелинейная.

- При приближении полюса к единичной окружности (увеличении $|a_1|$) фильтр становится более узкополосным.

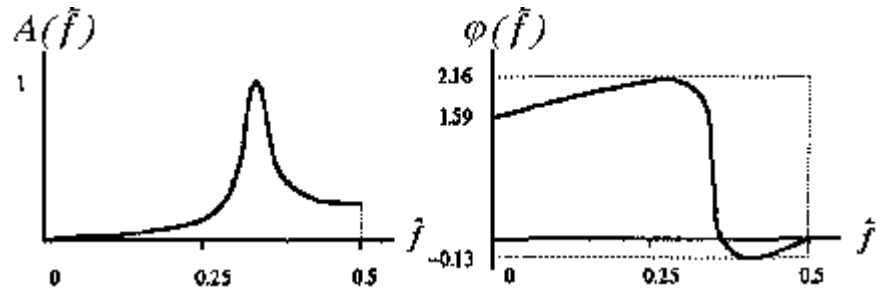


Рис. 10 АЧХ и ФЧХ БИХ-фильтра 2-го порядка

Частотные характеристики избирательного БИХ-фильтра 2-го порядка

Формулы для передаточной функции (ПФ), частотной (ЧХ), амплитудно-частотной (АЧХ) и фазо-частотной (ФЧХ) характеристик БИХ-фильтра 2-го порядка с учетом **Ошиб-ка! Источник ссылки не найден.**(0.6), (0.8), и (0.9) имеют вид

$$\text{ПФ} \quad H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}.$$

$$\text{ЧХ} \quad H(j\hat{\omega}) = \frac{b_0 + b_1 e^{-j\hat{\omega}} + b_2 e^{-j2\hat{\omega}}}{1 + a_1 e^{-j\hat{\omega}} + a_2 e^{-j2\hat{\omega}}}.$$

$$\text{АЧХ} \quad A(\hat{\omega}) = \sqrt{\frac{(b_0 + b_1 \cos \hat{\omega} + b_2 \cos 2\hat{\omega})^2 + (b_1 \sin \hat{\omega} + b_2 \sin 2\hat{\omega})^2}{(1 + a_1 \cos \hat{\omega} + a_2 \cos 2\hat{\omega})^2 + (a_1 \sin \hat{\omega} + a_2 \sin 2\hat{\omega})^2}} \quad (0.19)$$

$$\text{ФЧХ} \quad \varphi(\hat{\omega}) = -\arctan \frac{b_1 \sin \hat{\omega} + b_2 \sin 2\hat{\omega}}{b_0 + b_1 \cos \hat{\omega} + b_2 \cos 2\hat{\omega}} + \arctan \frac{a_1 \sin \hat{\omega} + a_2 \sin 2\hat{\omega}}{1 + a_1 \cos \hat{\omega} + a_2 \cos 2\hat{\omega}} \quad (0.20)$$

Вид АЧХ и ФЧХ фильтра можно определить путем расчета на ЭВМ по (0.19) и (0.20). Полезно знать, что значения АЧХ легко определяются на границах основной полосы частот (для $\hat{\omega} = 0$ и $\hat{\omega} = \pi$). Из (1.75) получим

$$A(0) = \left| \frac{b_0 + b_1 + b_2}{1 + a_1 + a_2} \right|, \quad A(\pi) = \left| \frac{b_0 - b_1 + b_2}{1 - a_1 + a_2} \right|.$$

Пример 1.13 Рассмотрим БИХ-фильтр с передаточной функцией

$$H(z) = \frac{0.0951 - 0.0951z^{-2}}{1 + 0.9z^{-1} + 0.81z^{-2}}$$

- Фильтр имеет два вещественных нуля $z_1^0 = 1$ и $z_2^0 = -1$, а также два комплексно-сопряженных полюса $z_{1,2}^* = r^* e^{\pm j\varphi^*}$, где $r^* = \sqrt{a_2} = 0.9$, $\varphi^* = \arccos(-a_1 / 2r^*) = 2\pi/3$ (см. 1.8).

- Значения АЧХ на границах основной полосы частот $A(0) = 0$, $A(\pi) = 0$.

- Углу $\varphi^* = 2\pi/3$, на котором расположен полюс в z -плоскости, соответствует частота $\hat{f}^* = 1/3 = 0.33\dots$

- Графики АЧХ и ФЧХ приведены на рис. 10. Фильтр относится к классу избирательных полосовых фильтров (ПФ).

Повторите пример 1.13 (изменяя величину коэффициентов a_1 и a_2). Расчет АЧХ можно

выполнить с помощью любых, имеющихся в распоряжении, средств (даже на калькуляторе).

Цель расчета — построение графиков АЧХ и качественная оценка влияния величин коэффициентов a_1 и a_2 (положения полюсов $z_{1,2}^*$ в z -плоскости) на вид АЧХ. Полезно для каждого случая изображать карту нулей и полюсов.

Некоторые особенности частотных характеристик избирательных БИХ-фильтров 2-го порядка.

- Избирательный БИХ-фильтр 2-го порядка может быть либо полосовым (ПФ) либо режекторным (РФ).
- ФЧХ фильтра — нелинейная.
- При приближении полюса к единичной окружности (увеличении a_2) фильтр становится более узкополосным.
- Максимум АЧХ полосового фильтра находится *приблизительно* на частоте \hat{f}^* , которая соответствует углу ϕ^* положения полюса в z -плоскости.

Памятка

- ^ Частотные характеристики дискретных фильтров являются периодическими функциями с периодом, равным частоте дискретизации.
- ^ АЧХ и ФЧХ фильтра устанавливают связь между амплитудами и фазами выходного и входного гармонических сигналов.
- ^ Для фильтров с вещественными коэффициентами АЧХ — четная функция, ФЧХ — нечетная функция.
- ^ БИХ-фильтры имеют нелинейную ФЧХ.
- ^ КИХ-фильтры с симметричными коэффициентами имеют линейную ФЧХ.

10. ЛЕКЦИЯ №10

Тема: Структуры цифровых фильтров

Учебные вопросы:

1. Прямая форма реализации ЦФ.
2. Каноническая структура ЦФ 1-го вида.
3. Каноническая структура ЦФ 2-го вида.
4. Каскадная форма ЦФ.

10.1. Вопрос №1

Реализация цифровых фильтров в прямой форме

Рекурсивное разностное уравнение вида

$$y_n = \sum_{k=0}^N b_k x_{n-k} - \sum_{k=1}^N b_1 y_{n-k}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad 10.1 \quad (20)$$

описывает алгоритм вычислений в рекурсивном цифровом фильтре (с обратными связями).

Нерекурсивное разностное уравнение вида

$$y_n = \sum_{k=0}^N b_k x_{n-k}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad 10.2 \quad (21)$$

описывает алгоритм вычислений в нерекурсивном цифровом фильтре (без обратных связей).

Значение разностных уравнений состоит также в том, что они непосредственно определяют структуру цифровых фильтров.

Разностному уравнению соответствует структура ЦФ в прямой форме. Разностному уравнению 1-го порядка

$$y_n = \sum_{k=0}^1 b_k x_{n-k} - \sum_{k=1}^1 a_1 y_{n-k} = b_0 x_n + b_1 x_{n-1} - a_1 y_{n-1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad 10.3 \quad (22)$$

соответствует структура реализации в прямой форме (Рис. 2.).

Разностному уравнению 2-го порядка

$$y_n = b_0 x_n + b_1 x_{n-1} + b_2 x_{n-2} - a_1 y_{n-1} - a_2 y_{n-2} \quad 10.4 \quad (23)$$

соответствует структура реализации в прямой форме (Рис. 4.).

Структурные схемы нерекурсивных ЦФ характерны наличием только прямых связей и отсутствием обратных (Рис. 3.).

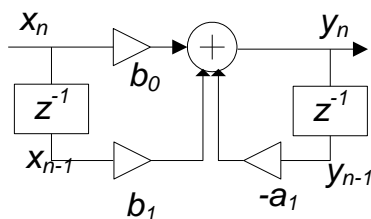


Рис. 2. Прямая форма реализации ЦФ 1-го порядка.

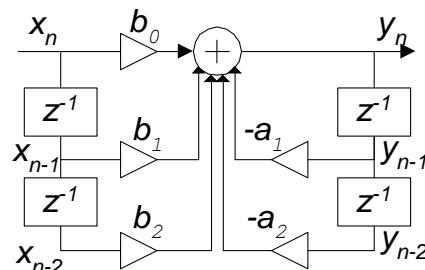


Рис. 4. Прямая форма реализации ЦФ 2-го порядка

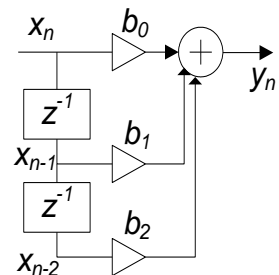


Рис. 3. Прямая форма реализации нерекурсивного ЦФ 2-го порядка

10.2. Вопрос №2

Каноническая структура ЦФ 1-го вида

Представим передаточную функцию РФ 2-го порядка

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \frac{B(z)}{A(z)} \quad 10.5 \quad (24)$$

в виде

$$H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z) = \frac{1}{A(z)} \cdot B(z) \quad 10.6 \quad (25)$$

Такое представление $H(z)$ соответствует последовательному соединению (Рис. 5.) РФ с передаточной функцией

$$H_1(z) = 1/(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}) \quad 10.7 \quad (26)$$

и НРФ с передаточной функцией

$$H_2(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} \quad 10.8 \quad (27)$$

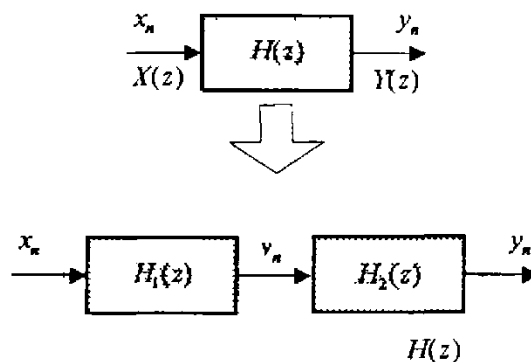


Рис. 5. Преобразование передаточной функции

Передаточным функциям $H_1(z)$ и $H_2(z)$ соответствуют разностные уравнения

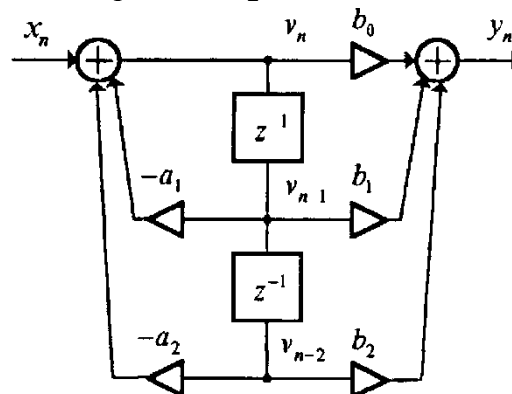


Рис. 6. Каноническая структура 1 РФ

$$v_n = x_n - a_1 v_{n-1} - a_2 v_{n-2},$$

$$y_n = b_0 v_n + b_1 v_{n-1} + b_2 v_{n-2} \quad 10.9 \quad (28)$$

Система уравнений (28) описывает каноническую структуру 1 РФ 2-го порядка, показанную на Рис. 6. Структуру называют канонической, поскольку она содержит минимальное количество элементов памяти.

Аналогичный вид имеют структуры меньшего (первого) и большего порядков

10.3. Вопрос №3

Каноническая структура ЦФ 2-го вида

Представим разностное уравнение РФ 2-го порядка

$$y_n = b_0 x_n + b_1 x_{n-1} + b_2 x_{n-2} - a_1 y_{n-1} - a_2 y_{n-2} \quad 0.1 \quad (29)$$

в виде

$$y_n = b_0 x_n + v_{n-1} \quad 0.2 \quad (30)$$

и

$$v_n = b_1 x_n - a_1 y_n + d_n \quad 0.3 \quad (31)$$

где v_{n-1} — задержанная на 1 интервал дискретизации последовательность

Последовательность d_{n-1} в (31) — это задержанная на 1 интервал дискретизации последовательность

$$d_n = b_2 x_n - a_2 y_n \quad 0.4 \quad (32)$$

Действительно, подставив (0.1) в (31), а затем в (30), получим исходное разностное уравнение РФ 2-го порядка.

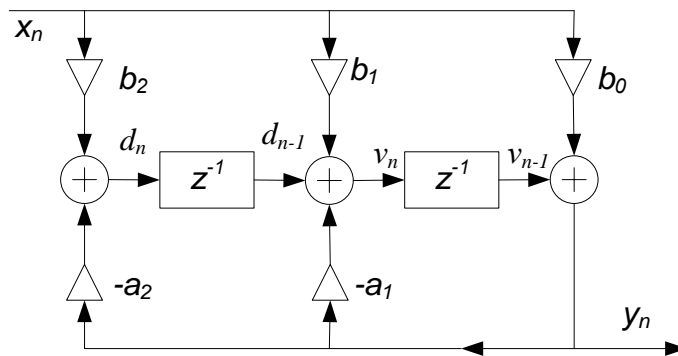


Рис. 7 Каноническая структура 2 РФ

Система уравнений (30) - (0.1) описывает *каноническую структуру* 2 РФ 2-го порядка, показанную на Рис. 7 Структура содержит минимальное количество элементов задержки. Аналогичный вид имеют структуры меньшего (первого) и большего порядков.

10.4. Вопрос №4

Каскадная структура ЦФ

Рекурсивные фильтры больших порядков строят, как правило, в виде каскадной структуры. Представим передаточную функцию (1.44) РФ в виде

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N-1} a_k z^{-k}} = \prod_{i=1}^R H_i(z), \quad 0.5 \quad (33)$$

где $H_i(z)$ - передаточные функции РФ 1-го или 2-го порядков, реализованные, в свою очередь, в виде прямой или канонической структур. Такое представление $H(z)$ соответствует последовательному соединению R рекурсивных фильтров 1-го или 2-го порядков.

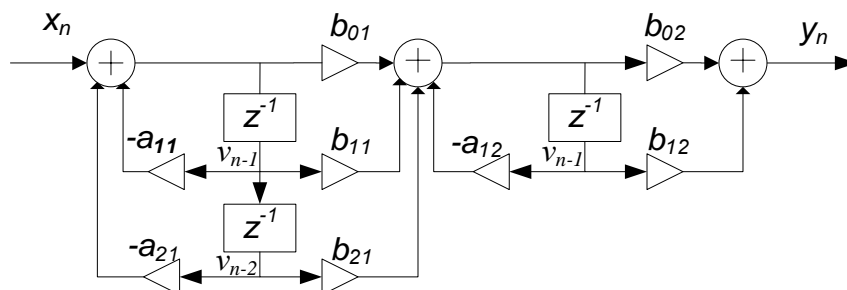


Рис. 8 Каскадная структура РФ 3-го порядка

На Рис. 8 показана каскадная структура РФ 3-го порядка. Она представляет собой последовательное соединение фильтра 2-го порядка и фильтра 1-го порядка. Каждый из фильтров реализован в виде канонической структуры 1.

11. ЛЕКЦИЯ №11

Тема: **Описание ЦФ в пространстве состояний**

Учебные вопросы: 1. Матричное представление разностных уравнений ЦФ.
 2. Структура ЦФ в пространстве состояний.

11.1. Вопрос №1

Матричное представление разностных уравнений ЦФ

Метод *пространства состояний* [61 — 64] является современным инструментом анализа и синтеза сложных систем автоматического регулирования и управления. Метод пригоден для исследования как стационарных, так и нестационарных систем. Он естественным образом учитывает начальные условия, позволяет «сшивать» решения по непрерывности в моменты коммутации параметров системы

_. Метод пространства состояний развит как для аналоговых, так и для дискретных систем, в нём используется развитый математический аппарат — матричное исчисление [47]. Имеются также модификации метода для нелинейных систем [61]. Метод пространства состояний является перспективным и для ЦФ [3].

Рассмотрим систему разностных уравнений (4.1)

$$\begin{cases} v[n] = x[n] - \sum_{k=1}^N b_k v[n-k]; \\ y[n] = \sum_{k=0}^M a_k v[n-k]. \end{cases} \quad (4.1)$$

, 11.1

описывающих алгоритм работы рекурсивного скалярного вещественного ЦФ при канонической форме реализации. Представим разностные уравнения высокого порядка системами разностных уравнений первого порядка. Для этого введём в рассмотрение вектор состояний $s[n]$, где $s_1[n] = v[n]$, и запишем первое уравнение (4.1) в следующем виде:

$$\left. \begin{cases} s_2[n] = v[n-1]; \\ s_3[n] = v[n-2]; \\ s_4[n] = v[n-3]; \\ \dots \\ s_{N+1}[n] = - \sum_{k=1}^N b_k v[n-k] + x[n] \end{cases} \right\} \quad (4.2)$$

11.2

или

$$\left\{ \begin{aligned} s_1[n+1] &= s_2[n]; \\ s_2[n+1] &= s_3[n]; \\ s_3[n+1] &= s_4[n]; \\ &\dots \\ s_N[n+1] &= - \sum_{k=1}^N b_k s_k[n] + x[n]. \end{aligned} \right. \quad (4.3)$$

11.3

Систему уравнений (4.3) удобно представить в векторно-матричной форме:

$$\mathbf{s}[n+1] = \mathbf{A}\mathbf{s}[n] + \mathbf{B}x[n], \quad 11.4 \quad (4.4)$$

где $\mathbf{s}[n]$ — вектор-столбец состояний размера $N \times 1$;

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -b_1 & -b_2 & -b_3 & \dots & -b_{N-1} & -b_N \end{pmatrix} \quad (4.5) \quad 11.5$$

— квадратная матрица размера $N \times N$ (матрица коэффициентов ЦФ);

$$\mathbf{B} = (0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1)^T \quad 11.6 \quad (4.6)$$

— вектор-столбец размера $N \times 1$, называемый вектором управления; $(\dots)^T$ — символ транспонирования; $x[n]$ — скалярный входной сигнал.

Второе уравнение системы (4.1) также запишем в векторно-матричной форме, добавив при этом слагаемое $Dx[n]$:

$$y[n] = \mathbf{C}\mathbf{s}[n] + Dx[n], \quad 11.7 \quad (4.7)$$

где

$$\mathbf{C} = (a_0 \ a_1 \ a_2 \ \dots \ a_M \ 0 \ \dots \ 0) \quad (4.8)$$

— вектор-строка размера $1 \times N$ (вектор выхода); D — скаляр, отображающий прохождение входного сигнала на выход в обход системы (при $M < N$ он имеет нулевое значение, т.е. $D=0$).

Таким образом, в пространстве состояний одномерный скалярный вещественный стационарный линейный ЦФ описывается следующей системой векторно-матричных уравнений:

$$\begin{cases} \mathbf{s}[n+1] = \mathbf{A}\mathbf{s}[n] + \mathbf{B}x[n]; \\ y[n] = \mathbf{C}\mathbf{s}[n] + Dx[n]. \end{cases} \quad (4.9) \quad 11.8$$

Аналогичными уравнениями описывается в пространстве состояний одномерный векторный *нестационарный* линейный ЦФ [ср. с (4.9)]:

$$\begin{cases} \mathbf{s}[n+1] = \mathbf{A}[n]\mathbf{s}[n] + \mathbf{B}[n]\mathbf{x}[n]; \\ y[n] = \mathbf{C}[n]\mathbf{s}[n] + \mathbf{D}[n]\mathbf{x}[n], \end{cases} \quad (4.10) \quad 11.9$$

где $\mathbf{s}[n]$ — вектор-столбец размера $N \times 1$ (вектор состояния); $\mathbf{x}[n]$ — вектор-столбец входных сигналов размера $R \times 1$; $\mathbf{y}[n]$ — вектор-столбец выходных сигналов размера $L \times 1$; $\mathbf{A}[n]$ — квадратная матрица размера $N \times N$ (матрица коэффициентов системы); $\mathbf{B}[n]$ — прямоугольная матрица размера $N \times R$ (матрица управления); $\mathbf{C}[n]$ — прямоугольная матрица размера $L \times N$ (матрица выхода); $\mathbf{D}[n]$ — прямоугольная матрица размера $L \times R$ (матрица обхода).

11.2. Вопрос №2

Структура ЦФ в пространстве состояний

Структурная схема линейной системы в пространстве состояний, описываемой векторно-матричными уравнениями (4.10), изображена на рис.4.4.

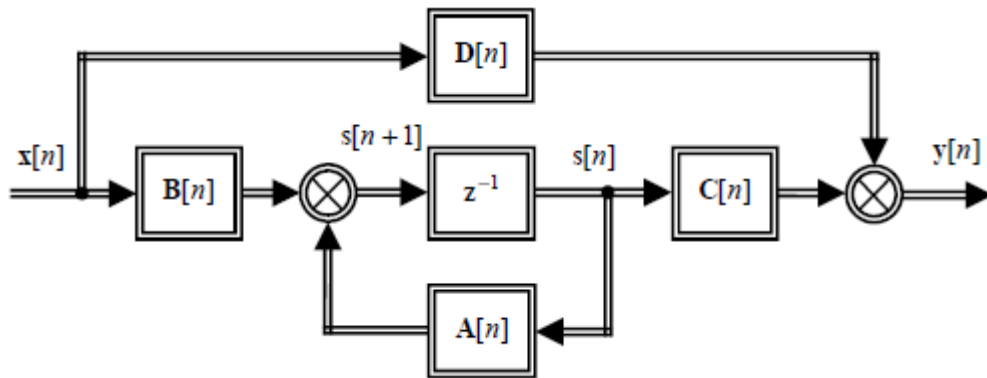


Рис.4.4. Структурная схема нестационарной линейной дискретной системы в пространстве состояний, описываемой уравнениями (4.10)

В случае стационарного ЦФ все матрицы $\mathbf{A}[n]$, $\mathbf{B}[n]$, $\mathbf{C}[n]$ и $\mathbf{D}[n]$ имеют постоянные элементы, которые не зависят от «дискретного времени» n . При этом система уравнений (4.10) принимает более простой вид:

$$\begin{cases} s[n+1] = \mathbf{A}s[n] + \mathbf{B}\mathbf{x}[n]; \\ y[n] = \mathbf{C}s[n] + \mathbf{D}\mathbf{x}[n]. \end{cases} \quad (4.11) \quad 11.10$$

Системами векторно-матричных уравнений (4.9) — (4.11) можно описывать в пространстве состояний как вещественные, так и комплексные ЦФ. В последнем случае векторы и матрицы, входящие в эти уравнения, имеют комплексные элементы.

12. ЛЕКЦИЯ №12

Тема: ЦФ с конечной импульсной характеристикой

Учебные вопросы: 1. Свойства КИХ-фильтров.
2. Условие линейности фазовой характеристики.

12.1. Вопрос №1 Свойства КИХ-фильтров

Для КИХ-фильтров разностное уравнение имеет вид

$$y_n = \sum_{i=0}^N b_i x_{n-i}, \quad 12.1 \quad (1)$$

передаточная функция –

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{i=0}^N b_i z^{-i}. \quad 12.2 \quad (2)$$

Отметим, что КИХ-фильтр (1) всегда устойчив, так как его импульсная характеристика имеет конечную длину.

Фрагмент классификации нерекурсивных линейных ЦФ по «внутренним» свойствам алгоритма приведён на рис.5.1.

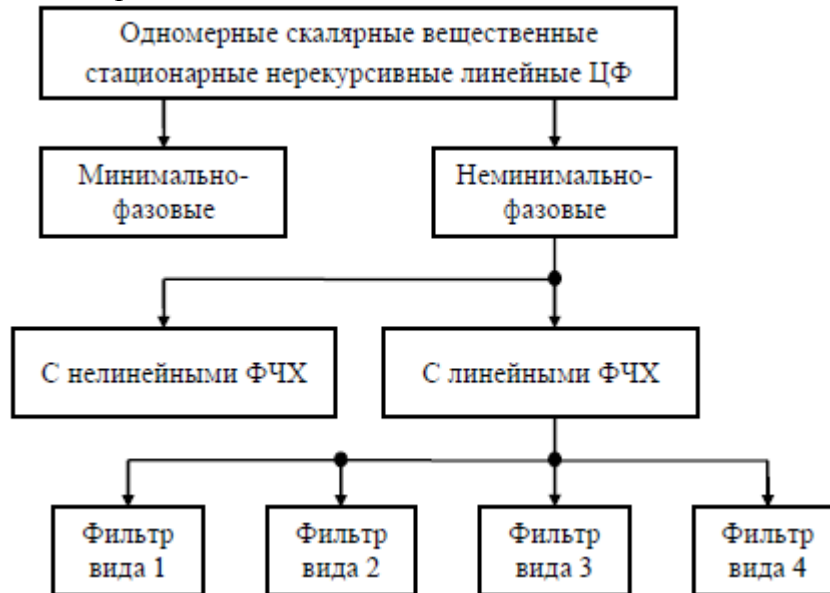


Рис.5.1. Классификация нерекурсивных линейных ЦФ по «внутренним» свойствам алгоритма

Перечислим *основные достоинства* этих фильтров:

1. Легко создавать КИХ-фильтры со строго линейной фазовой характеристикой. Во многих случаях, когда проектируется фильтр с произвольной амплитудной характеристикой, это упрощает задачу аппроксимации. Фильтры с линейной фазовой характеристикой особенно важны в случаях, когда приходится учитывать дисперсионные искажения, связанные с нелинейностью фазовой характеристики (например, при обработке речи и передаче данных).

2. КИХ-фильтры можно эффективно строить как по рекурсивной, так и по нерекурсивной схемам.

3. КИХ-фильтры, реализуемые нерекурсивно, т. е. с помощью прямой свертки, всегда устойчивы.

4. При нерекурсивной реализации КИХ-фильтров шумы округления, возникающие за счет выполнения арифметических операций с конечной точностью, легко минимизировать.

Перечислим **недостатки** КИХ-фильтров:

1. Для аппроксимации фильтров, частотные характеристики которых имеют острые срезы, требуется импульсная характеристика с большим числом отсчетов N . Поэтому при использовании обычной свертки необходимо выполнять большой объем вычислений.

2. Задержка в КИХ-фильтрах с линейной фазовой характеристикой не всегда равна целому числу интервалов дискретизации. В некоторых приложениях такая некрatная задержка может вызвать определенные трудности.

12.2. Вопрос №2

Условие линейности фазовой характеристики

Пусть $\{h(n)\}$ – физически реализуемая последовательность конечной длины, заданная на интервале $0 \leq n \leq N-1$. Ее z -преобразование равно

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h_n z^{-n}. \quad 12.3 \quad (34)$$

преобразование Фурье от $\{h_n\}$

$$H(e^{-j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h_n e^{-j\omega n} \quad 12.4 \quad (35)$$

является периодическим по частоте с периодом 2π , т. е.

$$H(e^{-j\omega}) = H(e^{-j\omega+2\pi m}), \quad m=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad 12.5 \quad (36)$$

Для действительных последовательностей $\{h(n)\}$ функция

$$H(e^{-j\omega}) = \pm |H(e^{-j\omega})| \cdot e^{-j\Theta(\omega)} \quad 12.6 \quad (37)$$

имеет модуль $|H(e^{-j\omega})| = |H(e^{j\omega})|$, симметричную функцию частоты, и фазу, асимметричную функцию частоты:

$$|H(e^{-j\omega})| = |H(e^{j\omega})|, \quad 0 \leq \omega \leq \pi, \quad 12.7 \quad (38)$$

$$\Theta(\omega) = -\Theta(-\omega) \quad (39)$$

Рассмотрим, при каких условиях импульсная характеристика h_n фильтра будет обеспечивать строгую линейность его фазовой характеристики. Требование линейности фазы фильтра означает, что фазовая характеристика $\Theta(\omega)$ имеет вид

$$\Theta(\omega) = -\alpha\omega, \quad -\pi \leq \omega \leq \pi \quad 12.8 \quad (40)$$

где α — постоянная фазовая задержка, выраженная через число интервалов дискретизации. Используя выражения (37) и (40), выражение (35) запишем следующим образом:

$$H(e^{-j\omega}) = \pm |H(e^{-j\omega})| \cdot e^{-j\alpha\omega}. \quad 12.9 \quad (41)$$

Приравнивая действительные и мнимые части, получим

$$\pm |H(e^{-j\omega})| \cdot \cos(\alpha\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h_n \cos(\omega n), \quad 12.10 \quad (42)$$

$$\pm |H(e^{-j\omega})| \cdot \sin(\alpha\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h_n \sin(\omega n). \quad 12.11 \quad (43)$$

Разделим правые и левые части уравнений (42) и (43):

$$\frac{\sin(\alpha\omega)}{\cos(\alpha\omega)} = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} h_n \sin(\omega n)}{\sum_{n=0}^{N-1} h_n \cos(\omega n)}. \quad 12.12 \quad (44)$$

откуда

$$\operatorname{tg}(\alpha\omega) = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} h_n \sin(\omega n)}{h_0 + \sum_{n=1}^{N-1} h_n \cos(\omega n)}. \quad 12.13 \quad (45)$$

Существуют два возможных решения уравнения (44) или (45). Первое получается, если положить $\alpha = 0$, что дает [с учетом (45)]

$$0 = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} h_n \sin(\omega n)}{h_0 + \sum_{n=1}^{N-1} h_n \cos(\omega n)}. \quad 12.14 \quad (46)$$

Это уравнение имеет единственное решение, соответствующее произвольному h_0 и $h_n=0$ при $n \neq 0$, т. е. импульсная характеристика фильтра состоит из одиночного импульса — результат, не представляющий интереса. Другое возможное решение соответствует случаю $\alpha \neq 0$. Из выражения (44) получим

$$\sum_{n=0}^{N-1} h_n \cos(\omega n) \cdot \sin(\alpha\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h_n \sin(\omega n) \cdot \cos(\alpha\omega), \quad 12.15 \quad (47)$$

Откуда на основании формулы $\sin(\alpha - \beta) = \cos(\beta) \cdot \sin(\alpha) - \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha)$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} h_n \cos(\omega n) \cdot \sin(\alpha\omega) - \sum_{n=0}^{N-1} h_n \sin(\omega n) \cdot \cos(\alpha\omega) &= \sum_{n=0}^{N-1} h_n \sin[(\alpha - n)\omega] = 0 \\ \sum_{n=0}^{N-1} h_n \sin[(\alpha - n)\omega] &= 0. \end{aligned} \quad 12.16 \quad (48)$$

Поскольку уравнение (48) имеет вид ряда Фурье, то решение этого уравнения, если оно существует, является единственным.

Легко заметить, что решение уравнения (48) удовлетворяет условиям:

$$\alpha = \frac{N-1}{2}, \quad 12.17 \quad (49)$$

$$h_n = h_{N-1-n}, \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad 12.18 \quad (50)$$

Условие (49) означает, что для каждого N существует только одна фазовая задержка α , при которой может достигаться строгая линейность фазовой характеристики фильтра. Из условия (50) следует, что при заданном α , удовлетворяющем условию (49), импульсная характеристика должна обладать симметрией.

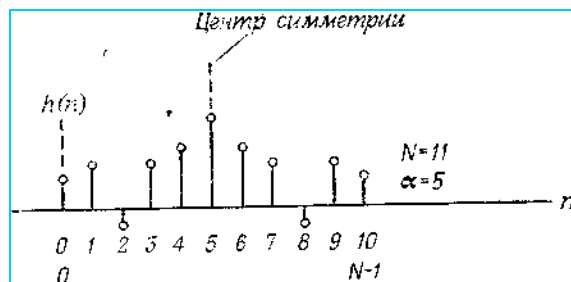


Рис. 1. Типичная импульсная характеристика при нечетном N (четная симметрия)

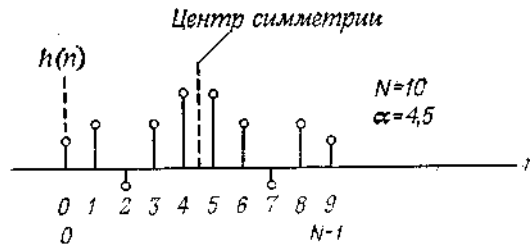


Рис. 2. Типичная импульсная характеристика при четном N (четная симметрия)

Если N — нечетное, то $(N-1)/2$ — целое, т. е. задержка в фильтре равна целому числу интервалов дискретизации. Типичная импульсная характеристика фильтра с линейной фазой для случая $N=11$ (или $\alpha=5$) приведена на рис. 1. Центр симметрии характеристики приходится на пятый отсчет.

Типичная импульсная характеристика фильтра с линейной фазой при четном N показана на фиг. 2. В этом примере $N=10$ и, как следует из (49), $\alpha = 0/2 = 4.5$. Таким образом, задержка в фильтре составляет 4.5 интервала дискретизации. Это означает, что центр симметрии импульсной характеристики лежит посередине между двумя отсчетами, как показано на фиг. 2.

Согласно условию (40) линейности фазовой характеристики фильтра, требуется, чтобы фильтр имел постоянные как групповую, так и фазовую задержки. Если, как это часто бывает, достаточно, чтобы только групповая задержка¹ была постоянной, можно определить еще один тип фильтра с линейной фазой, фазовая характеристика которого является кусочно-линейной функцией частоты ω , т. е.

$$H(e^{-j\omega}) = \pm |H(e^{-j\omega})| \cdot e^{-j(\beta - \alpha\omega)} \quad 12.19 \quad (51)$$

¹) Групповая задержка фильтра равна производной от фазовой характеристики по частоте в отличие от фазовой задержки, равной отношению фазы к частоте.

Рассуждая так же, как и при переходе от (48) к (49) и (50), можно показать, что новое единственное решение удовлетворяет следующим условиям:

$$\alpha = \frac{N-1}{2}, \quad 12.20 \quad (52)$$

$$\beta = \pm \frac{\pi}{2} \quad 12.21 \quad (53)$$

$$h(n) = -h(N-1-n), \quad 0 \leq n \leq N-1. \quad 12.22 \quad (54)$$

Фильтры, удовлетворяющие условиям (52)-(53)(54), снова создают задержку в $(N-1)/2$ интервалов дискретизации, но их импульсные характеристики в отличие от предыдущего случая антисимметричны относительно центра. Для примера на рис. 3, а и б показаны импульсные характеристики фильтров с нечетным и четным N , удовлетворяющие условиям (52)-(54). Следует отметить, что для нечетных значений N , согласно (54), $h[(N-1)/2] = 0$.

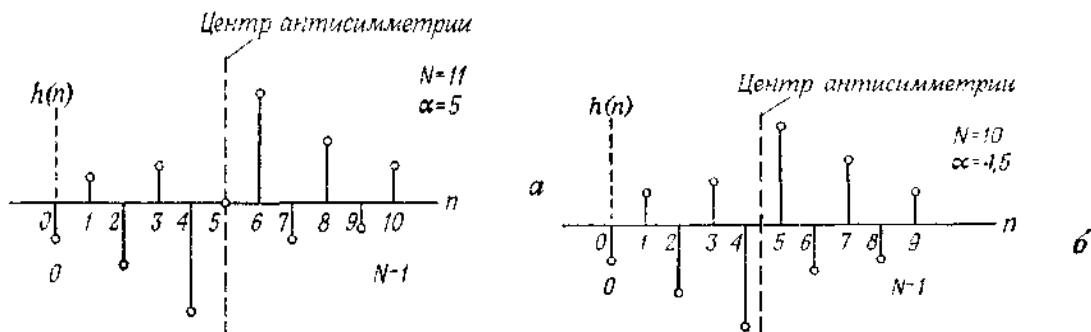


Рис. 3. Импульсная характеристика при нечетном (а) и четном (б) значениях N (нечетная симметрия)

Итак, в зависимости от значения N (нечетные или четные) и вида симметрии импульсной характеристики (симметричная или антисимметричная характеристика) возможны четыре различных вида КИХ-фильтров с линейными фазовыми характеристиками.

13. ЛЕКЦИЯ №13

Тема: Разновидности КИХ-фильтров с линейной фазой

Учебные вопросы:

1. КИХ-фильтр с линейной фазой вида 1.
2. КИХ-фильтр с линейной фазой вида 2
3. КИХ-фильтр с линейной фазой вида 3
4. КИХ-фильтр с линейной фазой вида 4.

13.1. Вопрос №1

КИХ-фильтр с линейной фазой вида 1

Запишем частотную характеристику КИХ-фильтров с линейной фазой в виде

$$H(e^{j\omega}) = H^*(e^{j\omega}) e^{j(\beta - \alpha\omega)},$$

где $H^*(e^{j\omega})$ – действительная функция, а α и β определяются формулами

$$\alpha = \frac{N-1}{2}, \quad 13.1 \quad (55)$$

$$\beta = \pm \frac{\pi}{2} \quad 13.2 \quad (56)$$

$$h(n) = -h(N-1-n), \quad 0 \leq n \leq N-1. \quad 13.3 \quad (57)$$

Выразим функцию $H^*(e^{j\omega})$ через значения коэффициентов импульсной характеристики для каждого четырех видов фильтров с линейной фазой. Соответствующие формулы будут получены в данном разделе. Позже они будут использованы при изложении различных методов расчета КИХ-фильтров с заданными частотными характеристиками.

• **Фильтр вида 1.** Если N – нечетное, то $(N-1)/2$ – целое, т. е. задержка в фильтре равна целому числу интервалов дискретизации.

Для этого случая $H(e^{j\omega})$ можно представить в виде

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{(N-3)/2} h(n)e^{-j\omega n} + h\left(\frac{N-1}{2}\right)e^{-j\omega(N-1)/2} + \sum_{n=(N+1)/2}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} \quad 13.4 \quad (58)$$

Делая замену $n=N-1-m$ во второй сумме, получим (порядок суммирования во второй сумме становится обратным)

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{(N-3)/2} h(n)e^{j\omega n} + h\left(\frac{N-1}{2}\right)e^{-j\omega(N-1)/2} + \sum_{m=0}^{(N-3)/2} h(N-1-m)e^{-j\omega[N-1-m]} \quad 13.5 \quad (59)$$

Поскольку $h(n) = h(N-1-n)$, две суммы в (59) можно объединить, а член $e^{-j\omega(N-1)/2}$ вынести за скобки, что даст

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega(N-1)/2} \left[\sum_{n=0}^{(N-3)/2} h(n) \left\{ e^{j\omega[(N-1)/2-n]} + e^{-j\omega[(N-1)/2-n]} \right\} + h(N-1)/2 \right] \quad 13.6 \quad (60)$$

или

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega(N-1)/2} \left\{ \sum_{n=0}^{(N-3)/2} 2h(n) \cos \left[\omega \left(\frac{N-1}{2} - n \right) \right] + h \left(\frac{N-1}{2} \right) \right\} \quad 13.7 \quad (61)$$

Подставив $m = (N-1)/2-n$ получим

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega(N-1)/2} \left\{ \sum_{m=0}^{(N-3)/2} 2h\left(\frac{N-1}{2}-m\right) \cos(\omega m) + h\left(\frac{N-1}{2}\right) \right\} \quad 13.8 \quad (62)$$

Окончательно при $a(0) = h[(N-1)/2]$ и $a(n) = 2h[(N-1)/2-n]$, где $n = 1, 2, \dots, (N-1)/2$, выражение (62) принимает вид

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega(N-1)/2} \left[\sum_{n=0}^{(N-1)/2} a(n) \cos(\omega n) \right] \quad 13.9 \quad (63)$$

что и дает искомую частотную характеристику. Таким образом, для фильтра вида 1

$$H^*(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{(N-1)/2} a(n) \cos(\omega n) \quad 13.10 \quad (64)$$

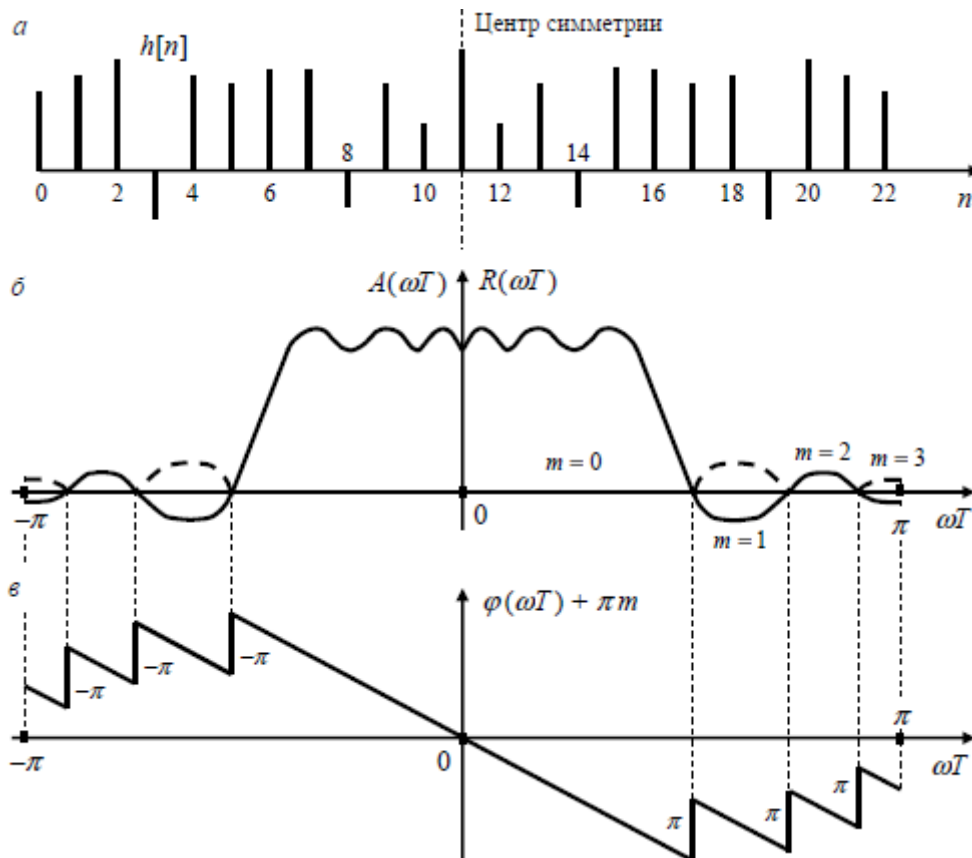


Рис.5.2. Характеристики цифрового фильтра вида 1 с линейной ФЧХ:
 а — импульсная характеристика $h[n]$; б — псевдоАЧХ $R(\omega T)$ и АЧХ $A(\omega T)$;
 в — ФЧХ $\varphi(\omega T) + \pi m$

Т.е. АЧХ фильтра вида 1 на границах основной полосы (при $\omega T = 0$ и $\omega T = \pi$) может принимать произвольные (в том числе и нулевые) значения. Отсюда следует, что нерекурсивный цифровой фильтр вида 1 с линейной ФЧХ может быть фильтром нижних частот (ФНЧ), верхних частот (ФВЧ), полосовым (ПФ) или режекторным (РФ).

13.2. Вопрос №2

КИХ-фильтр с линейной фазой вида 2

Если N — четное, то $(N-1)/2$ — дробное, т. е. задержка в фильтре равна не целому числу интервалов дискретизации.

В этом случае $H(e^{j\omega})$ принимает вид

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega(N-1)/2} \left\{ \sum_{n=1}^{N/2} 2h(n) \cos\left[\omega\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\right] \right\} \quad 13.11 \quad (65)$$

Подставляя в это выражение

$$b(n) = 2h\left(\frac{N}{2} - n\right), \quad n = 1, 2, \dots, \frac{N}{2},$$

Получим

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega(N-1)/2} \left\{ \sum_{n=1}^{N/2} b(n) \cos \left[\omega \left(n - \frac{1}{2} \right) \right] \right\} \quad 13.12 \quad (66)$$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega(N-1)/2} \left\{ \sum_{n=1}^{N/2} b(n) \cos \left[\omega \left(n - \frac{1}{2} \right) \right] \right\}. \quad (3.28)$$

Таким образом, для фильтра вида 2

$$H^*(e^{j\omega}) = \sum_{n=1}^{N/2} b(n) \cos \left[\omega \left(n - \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (3.29)$$

Необходимо отметить, что $H^*(e^{j\omega}) = 0$ при $\omega = \pi$ независимо от значений $b(n)$ или $h(n)$. Отсюда следует, что нельзя использовать фильтры этого вида для аппроксимации частотной характеристик, отличных от нуля при $\omega = \pi$ (например, при проектировании фильтров верхних частот).

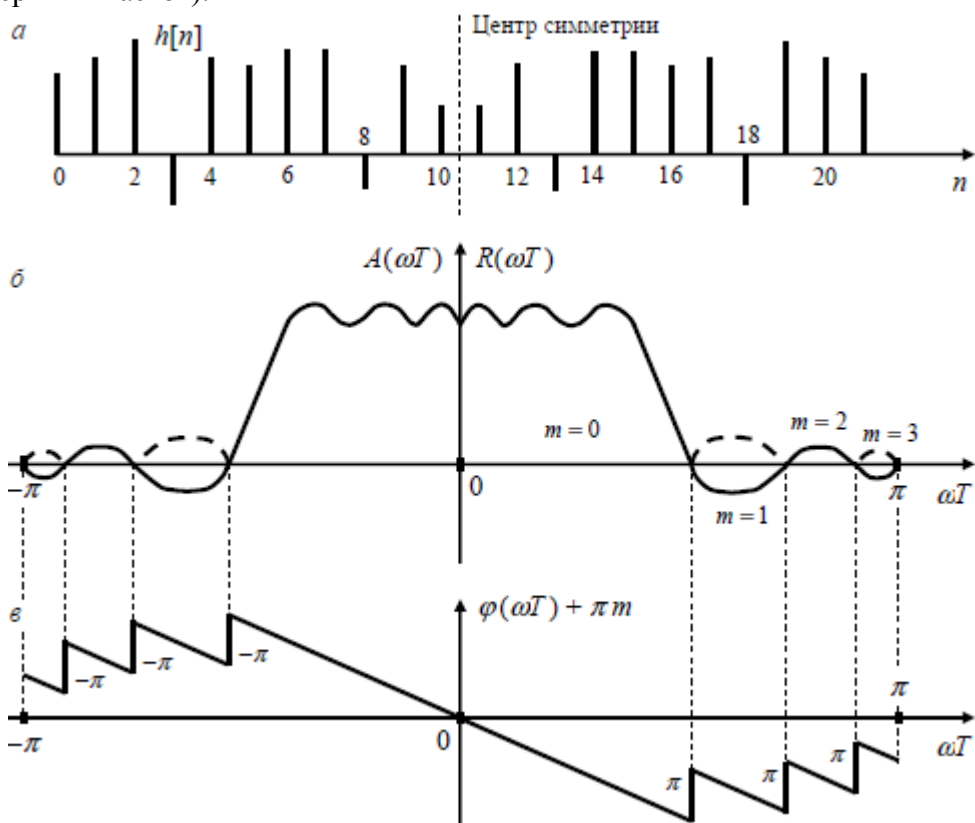


Рис.5.3. Характеристики цифрового фильтра вида 2 с линейной ФЧХ:

a — импульсная характеристика $h[n]$; b — псевдоАЧХ $R(\omega T)$ и АЧХ $A(\omega T)$;

ϕ — ФЧХ $\varphi(\omega T) + \pi m$

Т.е. АЧХ фильтра вида 2 при $\omega T = 0$ может принимать произвольное (в том числе и нулевое) значение, а при $\omega T = \pi$ — только нулевое значение. Отсюда следует, что нерекурсивный ЦФ вида 2 с линейной ФЧХ может быть фильтром нижних частот (ФНЧ) либо полосовым (ПФ).

13.3. Вопрос №3

КИХ-фильтр с линейной фазой вида 3

Антисимметричная импульсная характеристика, нечетное N .

В этом случае вывод формулы для $H^*(ej\omega)$ почти такой же, как и для фильтров вида 1, за исключением того, что из-за антисимметрии $\{h(n)\}$ сумма косинусов заменяется на сумму синусов, умноженную на j , т. е. вместо формулы (3.24) следует записать

$$H^*(ej\omega) = e^{-j\omega(N-1)/2} e^{j\pi/2} \left[\sum_{m=0}^{(N-3)/2} 2h\left(\frac{N-1}{2} - m\right) \cos(\omega m) \right], \quad (3.30) \quad 13.13$$

где $h(N-1)/2=0$, как было показано выше. Делая подстановку $c(n)=2h[(N-1)/2-n]$ при $n=1,2,\dots,(N-1)/2$,

$$H^*(ej\omega) = e^{-j\omega(N-1)/2} e^{j\pi/2} \left[\sum_{n=1}^{(N-1)/2} c(n) \sin(\omega n) \right]. \quad (3.31) \quad 13.14$$

Таким образом, для фильтра вида 3

$$H^*(ej\omega) = \sum_{n=1}^{(N-1)/2} c(n) \sin(\omega n). \quad (3.32) \quad 13.15$$

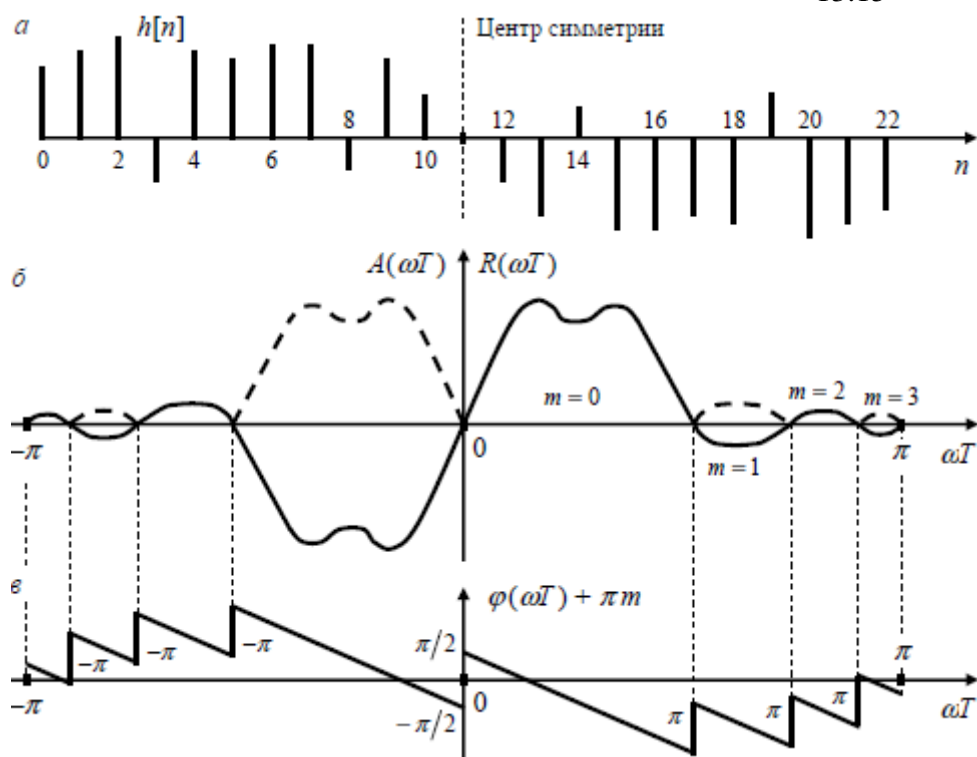


Рис.5.3. Характеристики цифрового фильтра вида 3 с линейной ФЧХ:
 a — импульсная характеристика $h[n]$; b — псевдоАЧХ $R(\omega T)$ и АЧХ $A(\omega T)$;
 c — ФЧХ $\varphi(\omega T) + \pi m$

Т.е. АЧХ фильтра вида 3 на границах основной полосы (при $\omega T=0$ и $\omega T=\pi$) может принимать только нулевые значения. Отсюда следует, что нерекурсивный цифровой фильтр вида 3 с линейной ФЧХ может быть только полосовым фильтром (ПФ).

13.4. Вопрос №4

КИХ-фильтр с линейной фазой вида 4

Фильтр вида 4. Антисимметричная импульсная характеристика, четное N .

В этом случае есть аналогия с фильтрами вида 2. Заменяя сумму косинусов суммой синусов, умноженной на j , вместо (3.27) получим

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega(N-1)/2} \left\{ \sum_{n=0}^{(N/2)-1} 2h(n) \sin \left[\omega \left(\frac{N}{2} - n - \frac{1}{2} \right) \right] \right\}. \quad (3.33)$$

13.16

Подстановка в это выражение

$$d(n) = 2h\left(\frac{N}{2} - n\right), \quad n = 1, 2, \dots, \frac{N}{2},$$

дает

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega(N-1)/2} \left\{ \sum_{n=1}^{N/2} d(n) \sin \left[\omega \left(n - \frac{1}{2} \right) \right] \right\}. \quad (3.34)$$

13.17

Таким образом, для фильтра вида 4

$$H^*(e^{j\omega}) = \sum_{n=1}^{N/2} d(n) \sin \left[\omega \left(n - \frac{1}{2} \right) \right], \quad (3.35)$$

13.18

Причем $H^*(e^{j\omega})=0$ при $\omega=0$. Следовательно, этот вид фильтра больше всего подходит для аппроксимации дифференциаторов и преобразователей Гильберта.

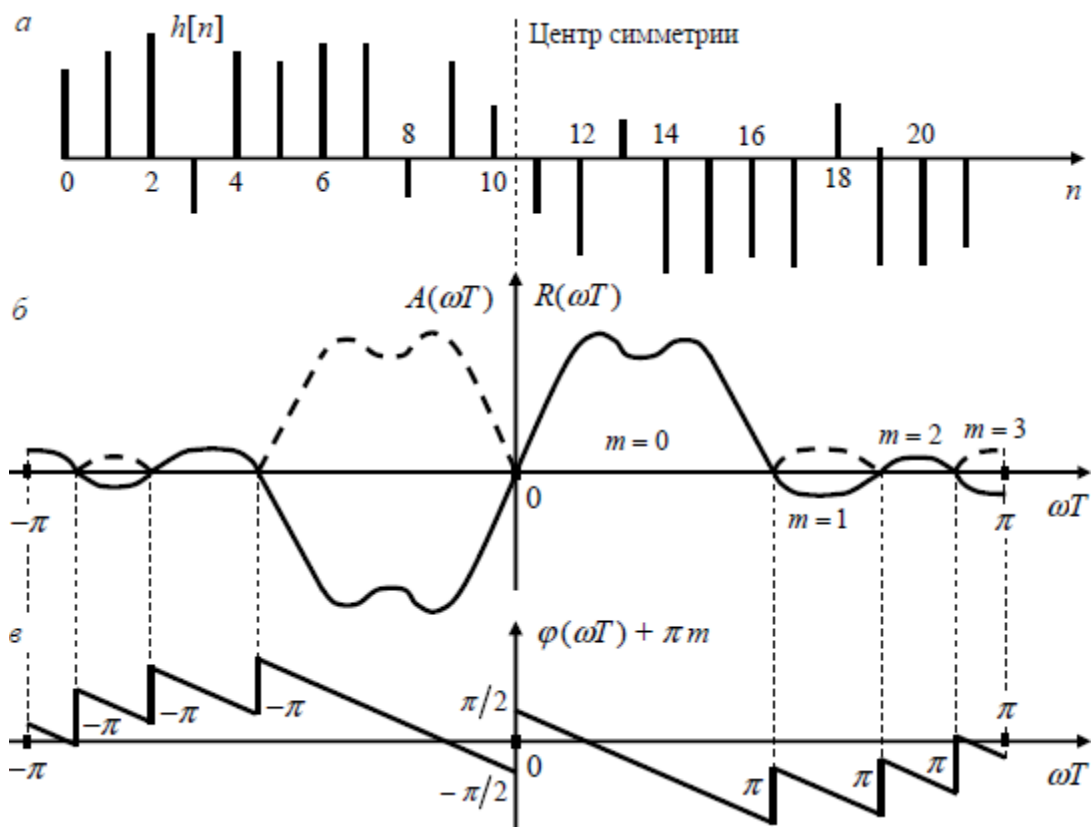


Рис.5.5. Характеристики цифрового фильтра вида 4 с линейной ФЧХ:

a — импульсная характеристика $h[n]$; $б$ — псевдоАЧХ $R(\omega T)$ и АЧХ $A(\omega T)$;
 $в$ — ФЧХ $\varphi(\omega T) + \pi n$

Т.е. АЧХ фильтра вида 4 при $\omega T = 0$ может принимать только нулевое значение, а при $\omega T = \pi$ — произвольное (в том числе и нулевое) значение. Отсюда следует, что нерекур-

сивный ЦФ вида 4 с линейной ФЧХ может быть фильтром верхних частот (ФВЧ) либо полосовым (ПФ).

Фильтры с линейной ФЧХ применяются в качестве избирательных фильтров, преобразователей Гильберта, дифференциаторов и корректоров амплитудно-частотных характеристик.

14. ЛЕКЦИЯ №14

Тема 5 Цифровая обработка сигналов в частотной области

Тема: Дискретное преобразование Фурье

- Учебные вопросы:
1. Спектральный анализ.
 2. Дискретное преобразование Фурье
 3. Свойства дискретного преобразования Фурье
 4. Восстановление непрерывного сигнала с помощью ДПФ. Матрица ДПФ.
 5. Связь ДПФ и спектра дискретного сигнала

14.1. Вопрос №1

Спектральный анализ

При дискретизации аналогового сигнала его спектр становится периодическим с периодом повторения, равным частоте дискретизации. Однако одного только этого соотношения оказывается недостаточно для решения всех практических задач спектрального анализа. Во-первых, в качестве исходных данных выступает именно последовательность дискретных отсчетов, а не аналоговый сигнал. Во-вторых, в большинстве случаев анализируемые сигналы являются случайными процессами, что требует выполнения какого-либо усреднения при расчете их спектров. Кроме того, в ряде случаев нам известна некоторая дополнительная информация об анализируемом сигнале, и эту информацию желательно учесть в спектральном анализе.

Дискретное преобразование Фурье лежит в основе различных технологий спектрального анализа, предназначенных для исследования случайных процессов. Дело в том, что если анализируемый сигнал представляет собой случайный процесс, то простое вычисление ДПФ обычно не представляет большого интереса, так как в результате получается лишь спектр единственной реализации процесса. Поэтому для спектрального анализа случайных сигналов необходимо использовать усреднение спектра. Такие методы, в которых используется только информация, извлеченная из самого входного сигнала, называются *непараметрическими* (nonparametric).

Другой класс методов предполагает наличие некоторой статистической *модели* случайного сигнала. Процесс спектрального анализа в данном случае включает в себя определение параметров этой модели, и потому такие методы называются *параметрическими* (parametric). Используется также термин "модельный спектральный анализ" (Model-Based Spectrum Analysis, MBSA).

14.2. Вопрос №2

Дискретное преобразование Фурье

Рассмотрим спектр дискретного *периодического* сигнала. Пусть последовательность отсчетов $\{x(k)\}$ является периодической с периодом N :

$$x(k + N) = x(k) \text{ для любого } k.$$

Такая последовательность полностью описывается *конечным* набором чисел, в качестве которого можно взять произвольный фрагмент длиной N , например $\{x(k), k = 0, 1, \dots, N - 1\}$. Поставленный в соответствие этой последовательности сигнал из смещенных по времени дельта-функций:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \cdot \delta(t - kT) \quad 14.1 \quad (67)$$

также, разумеется, будет периодическим с минимальным периодом NT .

Так как сигнал (5.1) является дискретным, его спектр должен быть *периодическим* с периодом $2\pi/T$. Так как этот сигнал является также и периодическим его спектр должен быть *дискретным* с расстоянием между гармониками, равным $2\pi/(NT)$.

Итак, периодический дискретный сигнал имеет периодический дискретный спектр, который также описывается конечным набором из N чисел (один период спектра содержит $\frac{2\pi}{T} / \frac{2\pi}{TN} = N$ гармоник).

Рассмотрим процедуру вычисления спектра периодического дискретного сигнала.

Так как сигнал периодический, будем раскладывать его в *ряд Фурье*. Коэффициенты \dot{X}_n этого ряда, согласно общей формуле (1.9), равны

$$\begin{aligned}\dot{X}_n &= \frac{1}{NT} \int_0^{NT} s(t) \cdot e^{-j\omega_n t} \cdot dt = \frac{1}{NT} \int_0^{NT} \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot \delta(t - kT) \cdot e^{-j\omega_n t} \cdot dt = \\ &= \frac{1}{NT} \sum_{k=0}^{N-1} x_k \int_0^{NT} \delta(t - kT) \cdot e^{-j\omega_n t} \cdot dt = \frac{1}{NT} \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot e^{-j\omega_n kT} = \\ &= \frac{1}{NT} \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot e^{-j \frac{2\pi \cdot n}{NT} kT} = \frac{1}{NT} \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot \exp(-j \frac{2\pi \cdot n}{NT} kT) = \\ &= \frac{1}{NT} \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot \exp(-j \frac{2\pi \cdot nk}{N}).\end{aligned}\quad 14.2 \quad (68)$$

Таким образом, формула для вычисления комплексных амплитуд гармоник представляет собой линейную комбинацию отсчетов сигнала.

В выражении (68) реальный масштаб времени фигурирует только в множителе $1/T$ перед оператором суммирования. При рассмотрении дискретных последовательностей обычно оперируют номерами отсчетов и спектральных гармоник без привязки к действительному масштабу времени и частоты. Поэтому множитель $1/T$ из (68) удаляют (частота дискретизации равна единице). Полученное выражение называется *дискретным преобразованием Фурье*:

$$\dot{X}_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot \exp(-j \frac{2\pi \cdot nk}{N}). \quad 14.3 \quad (69)$$

Существует и *обратное* дискретное преобразование Фурье. Переход от дискретно спектра к временным отсчетам сигнала выражается следующей формулой:

$$x_k = \sum_{n=0}^{N-1} \dot{X}_n \cdot \exp(j \frac{2\pi \cdot nk}{N}) \quad 14.4 \quad (70)$$

14.3. Вопрос №3

Свойства дискретного преобразования Фурье

В целом свойства ДПФ аналогичны свойствам непрерывного преобразования Фурье, однако дискретный характер анализируемого сигнала привносит некоторую специфику.

Линейность

Из формулы (2.4) очевидно, что ДПФ является линейным, то есть если последовательностям $\{x(k)\}$ и $\{y(k)\}$ с одним и тем же периодом L соответствуют наборы гармоник $X(n)$ и $Y(n)$, то последовательности $\{ax(k) + by(k)\}$ будет соответствовать спектр $aX(n) + bY(n)$.

Задержка

Если задержать исходную последовательность на один такт ($y(k) = x(k - 1)$), то, согласно (2.4), спектр необходимо умножить на $\exp(-j \frac{2\pi \cdot n}{N})$:

$$\dot{Y}_n = \dot{X}_n \cdot \exp(-j \frac{2\pi \cdot n}{N})$$

Поскольку мы считаем последовательность $\{x(k)\}$ периодической, рассматриваемый здесь сдвиг является циклическим: $y(0)=x(-1) = x(N-1)$.

Симметрия

Как уже отмечалось, спектр дискретного периодического сигнала является периодическим. Кроме того, сохраняется и свойство симметрии, которым обладает спектр непрерывного вещественного сигнала ($\dot{S}(-\omega) = \dot{S}^*(-\omega)$). Поэтому

$$\dot{X}_{N-n} = \dot{X}_{-n} = \dot{X}_n^* \quad 14.5 \quad (71)$$

Гармоника с нулевым номером (постоянная составляющая), как видно из (2.4) представляет собой среднеарифметическое отсчетов последовательности на одном периоде:

$$\dot{X}_0 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k \quad 14.6 \quad (72)$$

Если N четно, то амплитуда гармоники с номером $N/2$ является суммой отсчетов с чередующимися знаками:

$$\dot{X}_{N/2} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot (-1)^k \quad 14.7 \quad (73)$$

Согласно (71), спектр является «сопряженно-симметричным» относительно $N/2$, то есть содержит ровно такое же количество информации, что и сам сигнал. В самом деле, исходная последовательность представляется набором из N вещественных чисел. Спектр представляется набором из $N/2$ (вторая половина взаимно-однозначно связана с первой) комплексных чисел, каждое из которых с информационной точки зрения эквивалентно двум вещественным. Если же исходная последовательность $\{x(k)\}$ не является вещественной, симметрия спектра отсутствует и N комплексным отсчетам во временной области соответствует N комплексных отсчетов в спектральной области.

ДПФ произведения последовательностей

Возьмем две последовательности отсчетов $\{x_1(k)\}$ и $\{x_2(k)\}$ одинаковой длины N и вычислим результат их поэлементного умножения:

$$y_k = \{x_1(k)\} \cdot \{x_2(k)\} \quad 14.8 \quad (74)$$

Если применить к этой формуле прямое ДПФ, получится следующее выражение:

$$\dot{Y}_n = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \dot{X}_{1i} \cdot \dot{X}_{2n-i} \quad 14.9 \quad (75)$$

ЗАМЕЧАНИЕ При вычислении по формуле (75) могут понадобиться значения $X_2(i)$ с номерами, выходящими за рамки диапазона $0 \dots N-1$. В этом случае следует использовать свойство периодичности спектра: $\dot{X}_{2i} = \dot{X}_{2i \pm N}$

Это выражение представляет собой *круговую свертку* спектров $\dot{X}_1(i)$ и $\dot{X}_2(i)$. И так как и для непрерывного преобразования Фурье, спектр произведения является сверткой спектров.

При $n=0$ из (75) получается дискретный аналог *теоремы Рэлея* (см. раздел «Энергетические расчеты в спектральной области» главы 1):

$$\dot{Y}(0) = \sum_{k=0}^{N-1} x_1(k) x_2(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \dot{X}_1(i) \dot{X}_2(-i) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \dot{X}_1(i) \dot{X}_2^*(i) \quad 14.10 \quad (76)$$

При выводе формулы (76) были использованы соотношения (72) и (73).

Если, кроме того, последовательности $\{x_1(k)\}$ и $\{x_2(k)\}$ совпадают, то есть $x_1(k) = x_2(k) = x(k)$ для всех $k = 0 \dots N-1$, из (76) получается дискретный аналог *равенства Парсеваля* (см. раздел «Энергетические расчеты в спектральной области» главы 1 и формулу (1.24)):

$$\sum_{k=0}^{N-1} x^2(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} |\dot{X}_I(i)|^2$$

Круговая свертка

Так как мы рассматриваем периодические последовательности, то и суммирование при вычислении свертки таких последовательностей следует производить по одному периоду. Такую операцию называют *круговой сверткой*:

$$y(k) = \sum_{i=0}^{N-1} x_1(i) x_2(k-i) = \sum_{i=0}^{N-1} x_1(i) x_2((k-i) \bmod N) \quad 14.11 \quad (77)$$

ЗАМЕЧАНИЕ

$$\dot{Y}_n = \dot{X}_1(n) \cdot \dot{X}_2(n) \quad 14.12 \quad (78)$$

В этой формуле выражение $(k-i) \bmod N$ означает взятие $(k-i)$ по модулю N , то есть вычисление остатка от деления $(k-i)$ на N .

Подставив выражение (77) в (2.4), легко убедиться, что круговая свертка периодических временных последовательностей соответствует перемножению их спектров:

14.4. Вопрос №4

Восстановление непрерывного сигнала с помощью ДПФ. Матрица ДПФ

Являясь по своей сути спектром *дискретного* периодического сигнала, дискретное преобразование Фурье позволяет легко восстановить *непрерывный* периодический сигнал, занимающий ограниченную полосу частот. Для этого в формуле обратного ДПФ (2.5) необходимо заменить дискретный параметр (номер отсчета k) на непрерывный — нормированное время t/T , где T — период дискретизации

$$x(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=N/2}^{N/2-1} \dot{X}(n) \cdot \exp(j \frac{2\pi n t}{NT}) \quad 14.13 \quad (79)$$

Следует обратить внимание на еще одно отличие этого соотношения от формулы (2.5): диапазон индексов суммирования смещен вниз на $N/2$ (при четном N) при нечетном N суммирование производится от $n=-(N-1)/2$ до $(N-1)/2$. Это необходимо, чтобы получить аналоговый сигнал, занимающий полосу частот от 0 до π/T . Коэффициенты $X(n)$ с отрицательными номерами могут быть получены из соотношения симметрии (71).

Результат восстановления непрерывного периодического сигнала с помощью ДПФ, разумеется, совпадает с результатами, получаемыми при использовании ряда Котельникова (3.12). Однако использование ДПФ в данном случае оказывается более предпочтительным, так как ряд Котельникова для периодического сигнала содержит бесконечное число слагаемых, а формула (79) — конечное.

Матрица ДПФ

ДПФ является линейным преобразованием, трансформирующим вектор временных отсчетов в вектор такой же длины, содержащий отсчеты спектральные. Такое преобразование может быть реализовано [5] как умножение некоторой квадратной матрицы на входной вектор-столбец:

$$y = Ax,$$

где A — матрица преобразования. В случае ДПФ эта матрица имеет вид

$$A_{\text{DFT}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}} & e^{-j\frac{4\pi}{N}} & e^{-j\frac{6\pi}{N}} & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)} \\ 1 & e^{-j\frac{4\pi}{N}} & e^{-j\frac{8\pi}{N}} & e^{-j\frac{12\pi}{N}} & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{N}2(N-1)} \\ 1 & e^{-j\frac{6\pi}{N}} & e^{-j\frac{12\pi}{N}} & e^{-j\frac{18\pi}{N}} & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{N}3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)} & e^{-j\frac{2\pi}{N}2(N-1)} & e^{-j\frac{2\pi}{N}3(N-1)} & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)^2} \end{bmatrix} \quad 14.14$$

Общая формула для элемента матрицы, расположенного в n -м столбце m -й строки, выглядит так:

$$A_{\text{DFT}}(m, n) = \exp\left(-j2\pi \frac{(m-1)(n-1)}{N}\right), \quad 1 \leq m \leq N, \quad 1 \leq n \leq N.$$

Вычисление ДПФ путем умножения матрицы на вектор полностью соответствует формуле (5.3). Этот метод требует большого количества вычислительных операций, поэтому на практике вместо него применяются быстрые алгоритмы, рассматриваемые далее.

14.5. Вопрос №5

Связь ДПФ и спектра дискретного сигнала

Имея один и тот же конечный набор чисел, можно рассчитать либо *спектральную функцию* этого дискретного сигнала по формуле (3.2), либо его ДПФ по формуле (5.3). Разумеется, возникает вопрос о том, как связаны друг с другом эти два спектральных представления, полученные на основе одних и тех же отсчетов сигнала.

Сравнение формул (3.2) и (5.3) показывает, что ДПФ представляет собой просто *дискретные отсчеты* спектральной функции дискретного сигнала, соответствующие частотам $\omega_n = \omega_0 n/N$:

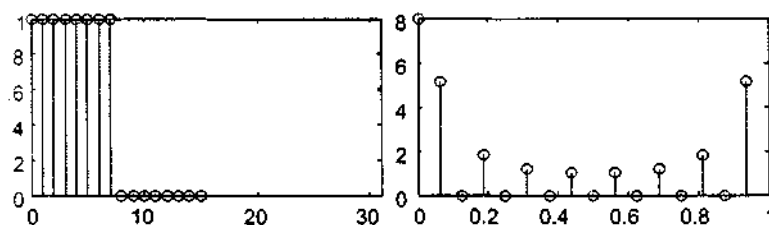
$$X(n) = S\left(\frac{2\pi n}{NT}\right) = S\left(\omega_0 \frac{n}{N}\right). \quad 14.15 \quad (5.12)$$

причине значения ДПФ иногда называют *спектральными отсчетами*.

Из соотношения (5.12) следует еще один важный вывод: если добавить к конечному набору отсчетов некоторое количество нулей, спектральная функция дискретного сигнала, естественно, не изменится, но ДПФ даст большее число спектральных отсчетов, соответствующих частотам, более тесно расположенным в интервале от нуля до частоты дискретизации.

```
% 16 отсчетов
x1 = [ones(8,1); zeros(8,1)];
y1 = fft(x1);
% ДПФ сигнала x1
x2 = [x1; zeros(16,1)];
y2 = fft(x2);
% ДПФ сигнала x2
subplot(2, 2, 1), stem(0:15, x1)
axis([0 31])
% график сигнала x1
subplot(2, 2, 2), stem((0:15)/16, abs(y1))
axis([0 1 0 8])
% модуль ДПФ сигнала x1
subplot(2, 2, 3), stem(0:31, x2)
axis([0 31])
% график сигнала x2
subplot(2, 2, 4), stem((0:31)/32, abs(y2))
axis([0 1 0 8])
% модуль ДПФ сигнала x2
```

Поясним сказанное на простом примере, вычислив ДПФ для отсчетов прямоугольного импульса при разном количестве концевых нулей (рис. 5.1):



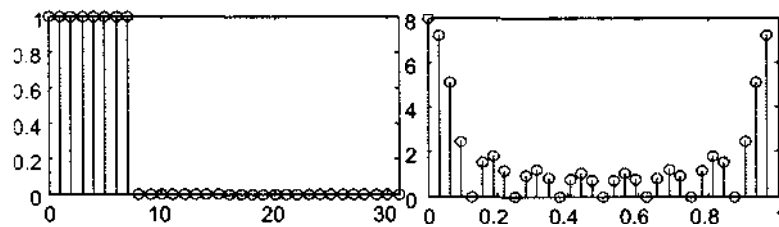


Рис. 1. Повышение спектрального разрешения ДПФ при дополнении сигнала нулями:
 сверху — исходный сигнал и модуль его ДПФ,
 снизу — сигнал, дополненный 16 нулями, и модуль его ДПФ

Горизонтальные оси на спектральных графиках проградуированы в долях частоты дискретизации. Из рис. 5.1 видно, что после увеличения длины сигнала вдвое за счет добавления нулевых отсчетов результат ДПФ стал содержать вдвое больше значений, соответствующих в два раза чаще расположенным частотам. Таким образом, дополнение сигнала нулями позволяет повысить спектральное разрешение при вычислении ДПФ.

15. ЛЕКЦИЯ №15

Тема: Алгоритмы быстрого преобразования Фурье

- Учебные вопросы:
1. Алгоритмы быстрого преобразования Фурье.
 2. БПФ с прореживанием по времени.
 3. БПФ с прореживанием по частоте.

15.1. Алгоритмы быстрого преобразования Фурье

Полученное выражение называется *дискретным преобразованием Фурье*:

$$\dot{X}_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot \exp(-j \frac{2\pi \cdot nk}{N}). \quad 15.1 \quad (80)$$

Существует и *обратное* дискретное преобразование Фурье. Переход от дискретно спектра к временным отсчетам сигнала выражается следующей формулой:

$$x_k = \sum_{n=0}^{N-1} \dot{X}_n \cdot \exp(j \frac{2\pi \cdot nk}{N}) \quad 15.2 \quad (81)$$

Для вычисления одного коэффициента ДПФ по формуле (2.4) необходимо выполнить N комплексных умножений и сложений. Таким образом, расчет всего ДПФ, содержащего N коэффициентов, потребует N^2 пар операций «умножение-сложение». Число операций возрастает пропорционально квадрату размерности ДПФ. Однако, если N не является простым числом и может быть разложено на множители, процесс вычислений можно ускорить, разделив анализируемый набор отсчетов на части, вычислив их ДПФ и объединив результаты. Такие способы вычисления ДПФ называются *быстрым преобразованием Фурье* (БПФ; английски термин — Fast Fourier Transform, FFT) и повсеместно используются на практике

При реализации БПФ возможно несколько вариантов организации вычисления в зависимости от способа деления последовательности отсчетов на части (*прореживание по времени* либо по частоте) и от того, на сколько фрагментов производится разбиение последовательности на каждом шаге (*основание БПФ*).

15.2. Вопрос №2

БПФ с прореживанием по времени

Рассмотрим идею БПФ с *прореживанием по времени* (decimation in time, DIT) на примере деления набора отсчетов пополам.

Итак, пусть N — четное число. Выделим в формуле (5.3) два слагаемых, соответствующих элементам исходной последовательности с четными и нечетными номерами:

$$\dot{X}_n = \sum_{m=0}^{N/2-1} x_{2m} e^{-j \frac{2\pi \cdot 2mn}{N}} + \sum_{m=0}^{N/2-1} x_{2m+1} e^{-j \frac{2\pi \cdot (2m+1)n}{N}}. \quad 15.3 \quad (82)$$

Введем обозначения $y_m = x_{2m}$ и $z_m = x_{2m+1}$, а также вынесем из второй суммы общий множитель $e^{-j\frac{2\pi n}{N}}$

$$\dot{X}_n = \sum_{m=0}^{N/2-1} \left(y_m e^{-j\frac{2\pi mn}{N}} \right) + e^{-j\frac{2\pi n}{N}} \cdot \sum_{m=0}^{N/2-1} \left(z_m e^{-j\frac{2\pi mn}{N}} \right). \quad 15.4 \quad (83)$$

Две суммы в (83) представляют собой ДПФ последовательностей $\{y(m)\}$ (отсчеты с четными номерами) и $\{z(m)\}$ (отсчеты с нечетными номерами). Каждая из этих ДПФ имеет размерность $N/2$. Таким образом,

$$\dot{X}_n = \dot{Y}_n + e^{-j\frac{2\pi n}{N}} \cdot \dot{Z}_n, \quad 15.5 \quad (84)$$

где \dot{Y}_n, \dot{Z}_n — ДПФ соответственно последовательностей отсчетов с четными и нечетными номерами:

$$\dot{Y}_n = \sum_{m=0}^{N/2-1} \left(y_m e^{-j\frac{2\pi mn}{N}} \right),$$

$$\dot{Z}_n = \sum_{m=0}^{N/2-1} \left(z_m e^{-j\frac{2\pi mn}{N}} \right)$$

Так как ДПФ размерности $N/2$ дает лишь $N/2$ спектральных коэффициентов, непосредственно использовать формулу (84) можно только при $0 < n < N/2$. остальных n ($N/2 < n < N$) следует воспользоваться периодичностью спектра дискретного сигнала (и, соответственно, периодичностью результатов ДПФ):

$$\dot{Y}_{n+N/2} = \dot{Y}_n, \quad \dot{Z}_{n+N/2} = \dot{Z}_n$$

С учетом этого при $n \geq N/2$ формула (84) представляется в виде

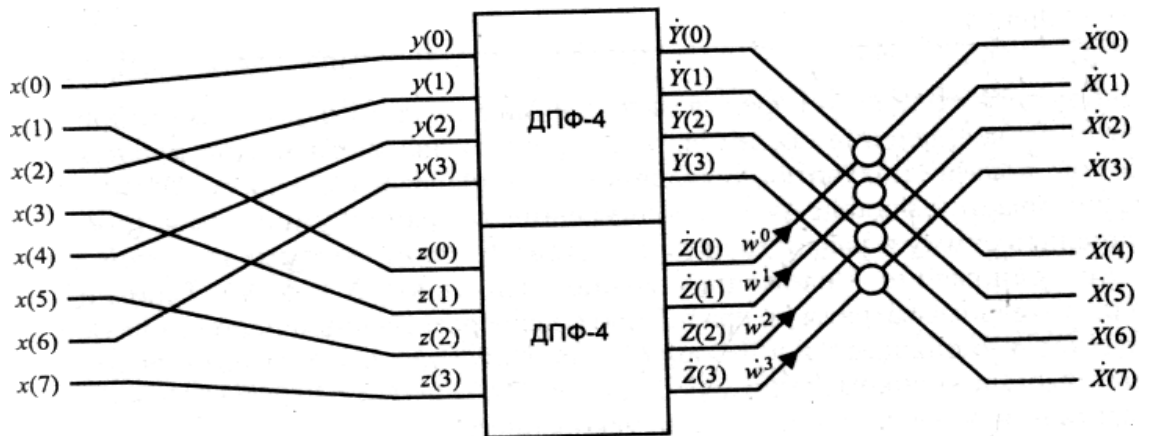


Рис. 1. Вычисление 8-точечного ДПФ с помощью двух 4-точечных ДПФ

$$\begin{aligned} \dot{X}_n &= \dot{Y}_{n-N/2} + e^{-j\frac{2\pi n}{N}} \cdot \dot{Z}_{n-N/2} = \\ &= \dot{Y}_{n-N/2} + e^{-j\frac{2\pi}{N}(n-N/2)} \cdot \dot{Z}_{n-N/2} \end{aligned}, \quad 15.6 \quad (85)$$

Процесс вычисления 8-точечного ДПФ путем разбиения его на два 4-точечных ДПФ иллюстрируется на рис. 1.

Блоки, выполняющие на рис. 1 объединение результатов двух ДПФ, требуют дополнительных комментариев. Каждый такой блок имеет два входных и два выходных сигнала. Один из входных сигналов умножается на комплексную экспоненту w^k , после чего суммируется со вторым входным сигналом и вычитается из него, формируя таким образом два выходных сигнала. Это соответствует реализации формул (84) и (85). Данная операция получила название "бабочки" (butterfly). Расшифровка ее структуры представлена на рис. 2.

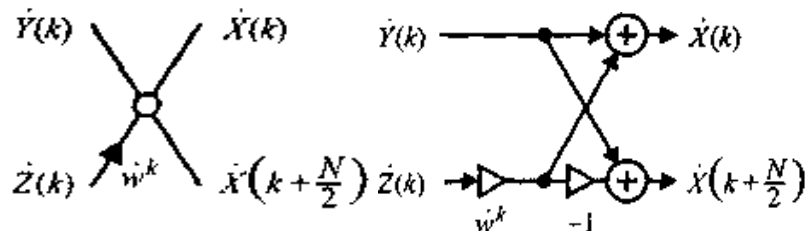


Рис. 2. Условное обозначение «бабочки» БПФ с прореживанием по времени (слева) и ее структурная схема (справа)

Оценим количество операций, необходимое для вычисления ДПФ указанным способом. Каждое из двух ДПФ половинной размерности требует $N^2/4$ операций. Кроме того, при вычислении окончательных результатов каждый спектрально коэффициент $Z(n)$ умножается на экспоненциальный комплексный множитель. Это добавляет еще $N/2$ операций. Итого получается $2N^2/4 + N/2 = N(N+1)/2$. Это почти вдвое меньше, чем при вычислении ДПФ прямым способом.

Если $N/2$ тоже является четным числом (то есть если N делится на 4), можно продолжить описанную процедуру, выразив результат через четыре ДПФ размерности $N/4$. Это позволяет еще больше сократить число требуемых вычислительных операций.

Наибольшая степень ускорения вычислений может быть достигнута при $N=2^k$, в этом случае деление последовательностей на две части можно продолжать до тех пор, пока не получатся двухэлементные последовательности, ДПФ которых рассчитывается вообще без использования операций умножения (достаточно вычислить сумму и разность двух отсчетов). Число требуемых при этом пар операций «умножение — сложение» можно оценить как $N \log_2(N)$. Таким образом вычислительные затраты по сравнению с непосредственным использованием формулы (2.4) уменьшаются в $N / \log_2(N)$ раз. При больших N это отношение становится весьма велико (например, $1024/\log_2(1024) = 102,4$, то есть при $N=1024$ достигается более чем 100-кратное ускорение).

15.3. Вопрос №3

БПФ с прореживанием по частоте

Формулы прямого и обратного ДПФ (2.4) и (2.5) отличаются только знаком в показателе экспоненты и множителем перед суммой. Поэтому можно получить еще один вариант алгоритма БПФ, выполнив преобразования, показанные на схеме рис. 5.2, в обратном порядке. Этот способ вычислений называется прореживанием по частоте (decimation in frequency, DIP). Покажем, как получить описание этого метода на основе формулы прямого ДПФ (2.4).

Разделим исходную последовательность $\{x_k\}$ на две следующие друг за другом половины (как и в предыдущем случае, N должно быть четным числом):

$$\dot{X}_n = \sum_{m=0}^{N/2-1} x_m e^{-j \frac{2\pi 2mn}{N}} + \sum_{m=0}^{N/2-1} x_{m+\frac{N}{2}} e^{-j \frac{2\pi (m+N/2)n}{N}}. \quad 15.7 \quad (86)$$

Из второй суммы можно выделить множитель.

Этот множитель равен 1 или -1 в зависимости от четности номера вычисляемого спектрального отсчета n , поэтому дальше рассматриваем четные и нечетные n по отдельности. После выделения множителя ± 1 комплексные экспоненты в обеих суммах становятся одинаковыми, поэтому выносим их за скобки, объединяя две суммы:

$$\begin{aligned}\dot{X}_{2k} &= \sum_{m=0}^{N/2-1} (x_m + x_{m+N/2}) e^{-j \frac{2\pi mk}{N/2}} \\ \dot{X}_{2k+1} &= \sum_{m=0}^{N/2-1} (x_m - x_{m+N/2}) e^{-j \frac{2\pi mk}{N/2}} e^{-j \frac{2\pi m}{N}}.\end{aligned}\quad 15.8 \quad (87)$$

Фигурирующие здесь суммы представляют собой ДПФ суммы и разности половин исходной последовательности, при этом разность перед вычислением ДПФ умножается на комплексные экспоненты $e^{-j \frac{2\pi m}{N}}$. Каждое из двух используемых здесь ДПФ имеет размерность $N/2$.

Итак, при прореживании по частоте вычисления организуются следующим образом:

1. Из исходной последовательности $\{x_k\}$ длиной N получаются две последовательности $\{y_m\}$ и $\{z_m\}$ длиной $N/2$ согласно следующим формулам:

$$y_m = x_m + x_{m+N/2}$$

$$z_m = (x_m - x_{m+N/2}) e^{-j \frac{2\pi m}{N}}$$

2. ДПФ последовательности $\{y_m\}$ дает спектральные отсчеты с четными номерами, ДПФ последовательности $\{z_m\}$ — с нечетными:

$$\dot{X}_{2k} = \dot{Y}_k = \sum_{m=0}^{N/2-1} y_m e^{-j \frac{2\pi mk}{N/2}}$$

$$\dot{X}_{2k+1} = \dot{Z}_k = \sum_{m=0}^{N/2-1} z_m e^{-j \frac{2\pi mk}{N/2}}$$

15.9 (88)

Все сказанное в предыдущем разделе о возможности деления последовательности на иное, отличное от двух, число частей и об уменьшении числа операций, требуемых для расчетов, относится и к алгоритму с прореживанием по частоте.

Процесс вычисления 8-точечного ДПФ путем разбиения его на два 4-точечных ДПФ с прореживанием по частоте показан на рис. 4.

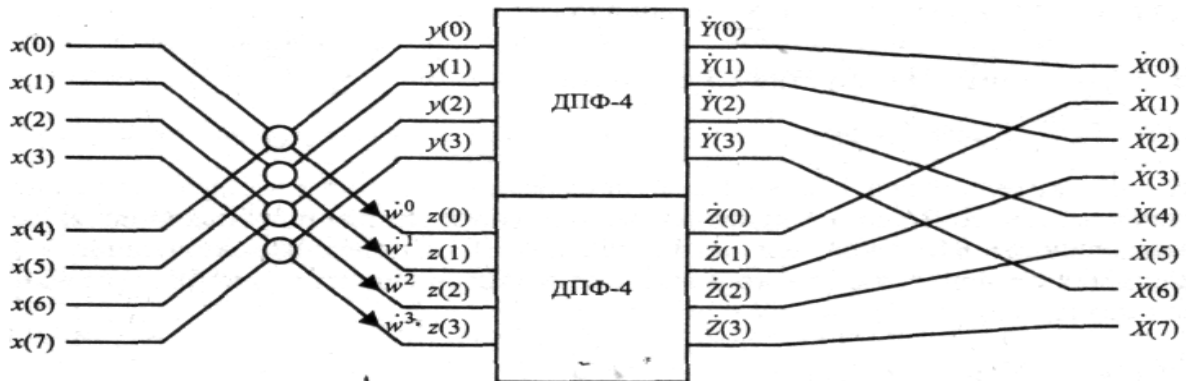


Рис. 4. Вычисление 8-точечного ДПФ с помощью двух 4-точечных ДПФ путем прореживания по частоте

Поскольку комплексный экспоненциальный множитель в данном алгоритме применяется к *результату* вычитания двух сигналов, «бабочка» БПФ с прореживанием по частоте имеет несколько иную структурную схему (рис.5).

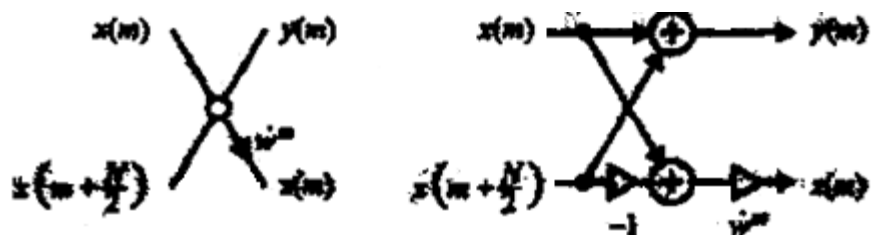


Рис. 5.5. Условное обозначение «бабочки» БПФ с прореживанием по частоте (слева) и ее структурная схема (справа)

ЗАМЕЧАНИЕ -

Для получения алгоритма обратного БПФ достаточно поменять в приведенных формулах знак в показателях комплексных экспонент и добавить на выходе (или на входе) деление на два (в более общем случае — на используемый коэффициент прореживания).